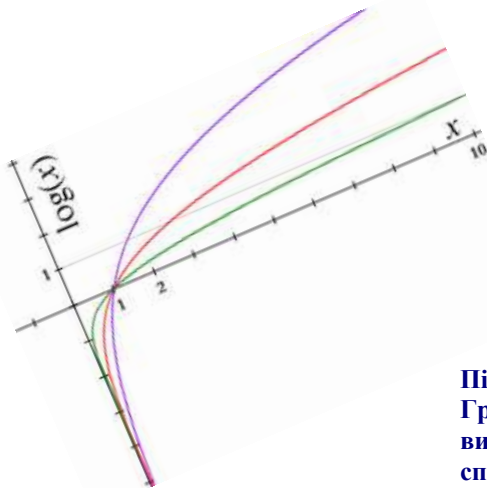


ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

(Методичні рекомендації педагогам
для практичного застосування)



Підготувала
Гриневич Тетяна Олександрівна
викладач математики,
спеціаліст вищої категорії,
викладач-методист

ВСТУП

Мета роботи - системазувати відомості про логарифмічну функцію в шкільному курсі алгебри старшої школи і розкрити роль і місце вивчення логарифмічної функції, рівнянь та нерівностей в школі та вибрати методику подання цієї теми.

Для досягнення мети, були поставлені такі **завдання**:

1. Систематизувати відомості про логарифмічну функцію, історію виникнення.
2. Систематизувати відомості про розв'язування логарифмічних рівнянь й нерівностей в шкільному курсі алгебри старшої школи.
3. Запропонувати методичні рекомендації щодо викладання теми «Логарифмічна функція» в шкільному курсі алгебри.
4. Підібрати диференційовану систему вправ.
5. Подати відомості про логарифмічну функцію в природі, науці, техніці, мистецтві.

Методика викладання теми.

I. Тема: Логарифм числа.

Введення поняття логарифма доцільно розпочати із проблемної ситуації.

Наприклад. **Проблемна ситуація.**

Пропоную розв'язати рівняння а). $5^x = 25$ і б). $2^x = 7$.

Учні легко розв'язують рівняння а). $x = 2$.

А як розв'язати рівняння б), адже немає такого показника степеня піднісши до якого число 2 одержимо 7.

Розв'язати таке рівняння зможемо після вивчення поняття логарифма.

Означення. Логарифмом числа N за основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$ називається показник степеня x , до якого треба піднести a , щоб дістати число N .

Записують $\log_a N = x$

- Наводимо приклади логарифмів.

$$\log_3 27 = 3;$$

$$\log_3 9 = 2;$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2};$$

$$\log_5 \frac{1}{125} = -3;$$

$$\log_5 25 = 2;$$

$$\log_{-2} (-8) - \text{не існує};$$

- $\log_a N$, де $a > 0$ і $a \neq 1$ має зміст лише при $N > 0$.

- $\log_a N = b$ і $a^b = N$ виражають одне і теж саме.

Ці рівності є рівносильними. За цими рівностями можна розв'язати три задачі:

- 1) знайти b
- 2) знайти a
- 3) знайти N

$\log_a a = 1$, бо $a^1 = a$ логарифмічна одиниця,

$\log_a 1 = 0$, бо $a^0 = 1$ логарифмічний нуль.

У багатьох випадках зручно використовувати десяткові логарифми, тобто логарифми за основою 10.

Логарифм за основою 10 прийнято записувати зручніше:

$\log_{10} a = \lg a$ – *десятковий логарифм*

$$\log_{10} 100 = \lg 100 = 2; \lg 10 = 1; \lg 1 = 0$$

Перш ніж ввести поняття натурального логарифма, слід ознайомити учнів з унікальним числом, яке називають числом Ейлера і

позначають e . Число e виникло при вивченні виразів типу $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. У

курсах вищої математики доведено, що даний вираз монотонно зрос-

тає. За ознакою Вєсрштраса вираз $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ має границю, яка дорівнює

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045 \dots$$
 Дане ірраціональне число

(доведення його ірраціональності виходить за межі не лише цього реферату, а й шкільного курсу) називають числом Ейлера і позначають, як я вже зазначала, літерою e . Унікальність, або, як нині модно говорити, „магію” цього числа можна помітити, досліджуючи показникову функцію $y = a^x$. Факт, що лише при $a = e$ кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = a^x$ у точці $x = 0$ рівний одиниці (дотична утворює кут 45° з віссю абсцис). Крім того, швидкість зміни функції $y = e^x$ в кожній точці дорівнює значенню цієї функції в цій точці. Всі інші похідні цієї функції (їх безліч) також рівні e^x . Первісна від функції $y = e^x$ рівна самій цій функції. Згадана функція єдина, що має вказані властивості.

По експоненціальному закону проходять дуже багато природних і штучних процесів, насамперед ріст деревини, охолодження рідин, майже всі процеси в термодинаміці, радіоактивний розпад.

Натуральним логарифмом називають логарифм за основою e (позначають $\ln x$). Цікаво, що саме через натуральні логарифми вира-

жені переважна більшість інтегралів від елементарних і неелементарних функцій.

- Логарифм за основою e прийнято записувати:

$$\log_e a = \ln a \text{ – натуральний логарифм, } e \approx 2,7181$$

$$\ln e = 1, \ln 1 = 0.$$

Перехід від логарифмічного рівняння до показникового:

$$\log_a b = x,$$

$$a^x = b$$

$a^{\log_a b} = b$ – основна логарифмічна тотожність

Наприклад, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_1 16} = 16, \quad 5^{\log_5 8} = 8$

Усні вправи

1. За означенням логарифма вказати, яке з трьох тверджень справедливие:

1) логарифм - степінь 2) логарифм - показник степеня; 3) логарифм - основа степеня.

2. Дано рівність $27^3 = 9$. Що тут є логарифмом, якого числа і за якою основою?

3. Довести, що $\log_a a = 1$

4. Чи правильна рівність:

$$\text{a) } \log_4 16 = 24 \quad \text{б) } \log_5 125 = 3; \quad \text{в) } \log_4 2 = \frac{1}{2}; \quad \text{г) } \lg 1 = 0.$$

5. Обчислити: а) $\log_3 9$; б) $\log_3 27$; в) $\log_2 \frac{1}{8}$; г) $\log_4 \frac{1}{4}$; д) $\log_5 1$.

6. Знайти x :

$$\text{а) } \log_5 x = 2; \quad \text{б) } \log_4 x = -3; \quad \text{в) } \log_{\frac{1}{2}} x = -4; \quad \text{г) } \log_{13} x = 0;$$

$$\text{д) } \log_x 81 = 4; \quad \text{е) } \log_x \frac{1}{2} = 1; \quad \text{є) } \log_{\frac{1}{2}} 4 = x.$$

7. Чи мають зміст вирази:

$$\text{а) } \log_5(-125); \quad \text{б) } \log_5 0; \quad \text{в) } \log_2(-4)^3; \quad \text{г) } -\log_8 16.$$

8. Обчислити:

$$\text{а) } 2^{\log_2 10}; \quad \text{б) } 1,5^{\log_{1,5} 7} \quad \text{в) } 1+7\log_7 2; \quad \text{г) } 4^{-\log_4 7}; \quad \text{д) } 36^{\log_6 5}; \quad \text{е) } 4 \cdot 9^{\log_9 6}$$

9. Порівняти числа:

$$\text{а) } \log_2 5 \text{ та } \log_2 64;$$

$$\text{б) } \log_{\frac{1}{3}} 2 \text{ та } \log_{\frac{1}{3}} 4;$$

$$\text{в) } \log_5 \frac{1}{2} \text{ та } \log_5 \frac{1}{3}$$

$$\text{г) } \log_2 11 \text{ та } \log_3 11.$$

10. Порівняти числа m і n :

$$\text{а) } \log_4 m < \log_4 n;$$

$$\text{б) } \log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n.$$

11. Порівняти основу a з одиницею:

$$\text{а) } \log_a 7 = 0,4; \quad \text{б) } \log_a 5 = -\frac{1}{4}; \quad \text{в) } \log_a 4 < \log_a 2; \quad \text{г) } \log_a \frac{2}{5} > \log_a \frac{2}{3}.$$

12. Які з даних чисел додатні, а які від'ємні:

$$\text{а) } \log_2 5; \quad \text{б) } \log_{\frac{1}{2}} 5; \quad \text{в) } \log_7 1; \quad \text{г) } \log_{\frac{\pi}{3}} 4; \quad \text{д) } \log_2 \frac{1}{3}$$

13. Розв'язати нерівності відносно x :

$$\text{а) } \log_2 x > \log_2 3;$$

$$\text{б) } \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 2.$$

II. Тема: Логарифм числа. Основні властивості логарифмів.

Крім основної логарифмічної тотожності можна довести інші тотожності, наприклад:

$$\log_a 1 = 0;$$

$$\log_a a = 1;$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \text{ якщо } x > 0, y > 0;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \text{ якщо } x > 0, y > 0;$$

$$\log_a x^p = p \log_a x, \text{ якщо } x > 0, p \in \mathbb{R};$$

При розв'язуванні вправ часто використовується **формула переходу від однієї основи до іншої**:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ якщо } x > 0, b > 0, b \neq 1;$$

Тренувальні вправи

Рівень А.

№1. Записати у вигляді логарифмічних рівностей:

$$2^4 = 16, \text{ тому } \log_2 16 = 4$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9, \text{ тому } \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

$$3^{-4} = \frac{1}{81}, \text{ тому } \log_3 \frac{1}{81} = -4$$

$$0,2^2 = 0,04, \text{ тому } \log_{0,2} 0,04 = 2$$

$$(\sqrt{5})^0 = 1, \text{ тому } \log_{\sqrt{5}} 1 = 0$$

Рівень Б

№2

Знайти логарифми числа.

$$1) \log_5 \frac{1}{125} = -3;$$

$$2) \log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2};$$

$$3) \log_{0,3} \frac{1}{0,09} = -2;$$

$$4) \log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4};$$

$$5) \log_{144} 12 = \frac{1}{2}$$

Р і в е н ь Б

№3

Перевірити виконання завдання №2 за означенням логарифма.

$$1) 5^{-3} = \frac{1}{125};$$

$$2) \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{64}}} = 8$$

$$3) 0,3^{-2} = \frac{1}{0,09};$$

$$4) (3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3};$$

$$5) (144)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12.$$

Р і в е н ь А

№4

Визначити х.

$$1) \log_2 x = 3$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

$$2) \log_{13} x = -1$$

$$x = 13^{-1}$$

$$x = \frac{1}{13}$$

$$3) \log_{14} x = 0$$

$$x = 14^0$$

$$x = 1$$

$$4) \log_5 x = 1$$

$$x = 5^1$$

$$x = 5$$

Р і в е н ь В

№5

Визначити x .

$$1) \log_x 8 = 3;$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$2) \log_x \frac{1}{4} = -2$$

$$x = \left(\sqrt{\frac{1}{4}} \right)^{-1} = 2;$$

$$3) \log_x 20 = 1;$$

$$x = 20;$$

$$4) \log_x 0,04 = -2$$

$$x = (0,04)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0,04}} = \frac{1}{0,2};$$

$$5) \log_x 3 = \frac{1}{4}$$

$$x = 3^4 = 81.$$

Р і в е н ь А

№6

Чи має зміст вираз?

$$1) \log_4(-64) - \text{не має змісту};$$

$$2) \log_5 0 - \text{не має змісту};$$

3) $\log_2(-4)^3$ – не має змісту.

Р і в е н ь Б

№7

Обчислити.

$$\log_{36} 216 - \frac{1}{3} \log 0,001 - \frac{1}{5} \log_{0,5} 32 = 2 - \frac{1}{3}(-3) - \frac{1}{5}(-5) = 4$$

№8.

Обчислити.

1) $7^{\log_7 8} = 8$; (рівень А)

2) $49^{\log_7 5} = (7^{\log_7 5})^2 = 5^2 = 25$; (рівень Б)

3) $4^{3 \log_4 211} = (4^{\log_4 2})^3 4^1 = 2^3 4 = 32$; (рівень В)

Самостійна робота

Варіант 1

1. Обчисліть: $4^{2 - \log_2 3}$

2. Розв'яжіть рівняння: $\log_x 4 = \frac{1}{3}$

3. Обчисліть: $\log_4 \log_9 81$.

4. Знайдіть x , якщо $\lg x = \frac{1}{2} \lg 9 - \frac{2}{3} \lg 8$

5. Розв'яжіть рівняння: $x^2 + 2^{\log_2 x} = 12$

Варіант 2

1. Обчисліть: $25^{1 + \log_5 3}$.

2. Розв'яжіть рівняння: $\log_x 9 = \frac{2}{3}$.

3. Обчисліть : $\log_9 \log_4 64$.

4. Знайдіть x , якщо $\lg x = \frac{1}{2} \lg 25 - \frac{3}{2} \lg 9$.

5. Розв'яжіть рівняння: $x^2 + 3^{\log_3 x} = 20$

Відповідь: В – 1: 1) $1\frac{7}{9}$; 2) 64; 3) 0,5; 4) $\frac{3}{4}$; 5) 3.

В – 2: 1) 225; 2) 27; 3) 0,5; 4) $\frac{5}{27}$; 5) 4.

Для самостійної роботи

Обчислити

I-B

II-B

1) $\lg 1000 + \log_{14} \sqrt{14} - 2 \log_7 \frac{1}{343}$;

1)

$\log_{169} 13 - \log_3 \frac{1}{81} + 2 \log_3 \sqrt[3]{3}$;

2) $6^{\log_6 2}$;

2) $8^{\log_8 5}$;

3) $5^{3 \log_5 10}$;

3) $2^{\frac{1}{2} \log_2 9}$;

4) $36^{1 + \log_6 2}$;

4) $25^{\log_5 3 - 1}$.

Самостійна робота

I-B

II-B

Обчислити:

$$1) \log_3 \frac{1}{27}$$

$$A) 3; \quad B) -3; \quad B) \frac{1}{3}; \quad \Gamma) 9$$

$$2) \lg 1000 + \log_{14} 14 - 2\log_7 \frac{1}{343};$$

$$A) 3; \quad B) -2; \quad B) \frac{1}{3}; \quad \Gamma) 10$$

$$3) 6^{\log_6 2};$$

$$A) 3; \quad B) -3; \quad B) \frac{1}{3}; \quad \Gamma) 2$$

$$4) 5^{3\log_5 10};$$

$$A) 30; \quad B) 3; \quad B) 1000; \quad \Gamma) 10$$

$$5) 36^{1+\log_6 2};$$

$$A) 144; \quad B) 36; \quad B) 38; \quad \Gamma) 6$$

6). Розв'яжіть рівняння:

$$4^x = 7$$

$$A) \frac{7}{4}; \quad B) \frac{4}{7}; \quad B) \log_4 7; \quad \Gamma) \log_7 4$$

$$1). \log_2 16$$

$$A) 3; \quad B) 5; \quad B) 4; \quad \Gamma) 8$$

$$2) \log_{169} 13 - \log_3 \frac{1}{81} + 2\log_3 3;$$

$$A) 3; \quad B) -1\frac{1}{2}; \quad B) 4; \quad \Gamma) 6\frac{1}{2}$$

$$3) 8^{\log_8 5};$$

$$A) 8; \quad B) -5; \quad B) \frac{1}{5}; \quad \Gamma) 5$$

$$4) 2^{\frac{1}{2}\log_2 9};$$

$$A) 3; \quad B) 2; \quad B) \frac{1}{2}; \quad \Gamma) 9$$

$$5) 25^{\log_5 3-1}.$$

$$A) 125; \quad B) -3; \quad B) \frac{9}{25}; \quad \Gamma) 5$$

$$3^x = 8$$

$$A) \frac{8}{3}; \quad B) \frac{3}{8}; \quad B) \log_8 3; \quad \Gamma) \log_3 8$$

III. Тема: Властивості логарифмів.

Самостійна робота.

Варіант - 1

1. Який з виразів $a - c$ має зміст?

- а) $\log_7(-5)$; б) $\log_9 0$; в) $\log_5(-7)^2$; г) $\lg(-2)^5$.
2. Яка з рівностей a - є правильна?
а) $\log_7 1 = 1$; б) $\log_2 16 = 4$; в) $\log_3 81 = 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = 5$.
3. Знайти x , якщо $\log_7 x = \log_7 9 + \log_7 2$:
а) 92; б) 29; в) 11; г) 18.
4. Обчислити $\log_2 48 - \log_2 3$:
а) 45; б) 16; в) $\frac{1}{2}$; г) 4.
5. Знайти x , якщо $\log_3 x = 4 \log_3 2$:
а) 16; б) 8; в) 12; г) 81.
6. Обчислити $49^{\log_7 4}$: а) 49; б) 28; в) 16; г) 8.
7. Якщо $\lg x = \lg 3 + 4 \lg a - \frac{1}{3} \lg b$, то ... :
а) $x = \frac{4a}{b}$; б) $x = \frac{3a^4}{\sqrt[3]{b}}$; в) $x = \frac{3a^4}{b^3}$; г) $x = \frac{3+a^4}{\sqrt[3]{b}}$.
8. Якщо $x = \frac{a^3 b}{5\sqrt[5]{c^2}}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то ...
а) $\lg x = 3 \lg a + \lg b - 5 - \frac{2}{5} \lg c$; б) $\lg x = 3 \lg a + b + \lg 5 - \frac{2}{5} \lg c$
в) $\lg x = 3 \lg a + \lg b - \lg 5 - \frac{5}{2} \lg c$; г) $\lg x = 3 \lg a + \lg b - \lg 5 - \frac{2}{5} \lg c$
9. Якщо $\log_3 2 = a$ і $\log_3 5 = b$, то $\log_3 200 = \dots$
а) $3a + 2b$; б) $a + b + 5$; в) $a^3 + b^2$; г) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$.
10. Обчислити $\log_{25} \log_2 32$: а) -2; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 2.

Варіант - 2

1. Який з виразів a - є має зміст?
а) $\log_3(-4)$; б) $\log_6 0$; в) $\log_{0,1}(-5)^2$; г) $\lg(-0,1)^3$
2. Яка з рівностей a - є неправильна?

- а) $\log_5 1 = 0$; б) $\log_{\frac{1}{4}} 64 = 3$; в) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; г) $\log_5 625 = 4$
3. Знайти x , якщо $\log_{11} x = \log_{11} 5 + \log_{11} 12$:
а) 125; б) 17; в) 512; г) 60.
4. Обчислити $\log_3 54 - \log_3 2$:
а) 27; б) $\frac{1}{3}$; в) 52; г) 3.
5. Знайти x , якщо $\log_3 x = 5 \log_3 2$:
а) 32; б) 10; в) 25; г) 243.
6. Обчислити $36^{\log_6 8}$: а) 16; б) 36; в) 64; г) 10.
7. Якщо $\lg x = 4 \lg a - \lg 7 - \frac{1}{3} \lg b$, то ... :
а) $x = \frac{4a}{7b^3}$; б) $x = \frac{a^4}{7^3 \sqrt[3]{b}}$; в) $x = \frac{4a}{21b}$; г) $x = \frac{a^4}{7 - \sqrt[3]{b}}$.
8. Якщо $\tilde{d} = \frac{12^4 \sqrt[4]{a^3}}{bc^2}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то ...
а) $\lg x = 12 + \frac{3}{4} \lg a - \lg b - 2 \lg c$; б) $\lg x = \lg 12 + \frac{3}{4} \lg a - \lg b - 2 \lg c$;
в) $\lg x = \lg 12 + \frac{4}{3} \lg a - \lg b - 2 \lg c$; г) $\lg x = \lg 12 + \frac{3}{4} \lg a - \lg b + 2 \lg c$
9. Якщо $\log_5 2 = a$ і $\log_5 3 = b$, то $\log_5 60 = \dots$
а) $2a + b + 1$; б) $a + 2b + 1$; в) $a^2 + b + 1$; г) $2a + b$.
10. Обчислити $\log_{\frac{1}{6}} \log_2 64$: а) 1; б) 2; в) -2; г) -1.

Варіант 3

1. Який з виразів a -г має зміст?
а) $\log_4(-7)$; б) $\log_3 \frac{1}{4}$; в) $\log_{11}(-3)^3$; г) $\log_{13} 0$.
2. Яка з рівностей a -г правильна?
а) $\log_3 1 = 1$; б) $\log_7 \frac{1}{49} = 2$; в) $\log_2 32 = 6$; г) $\log_5 125 = 3$.

3. Знайти x , якщо $\log_3 x = \log_3 8 + \log_3 4$:

а) 12 ; б) 2; в) 84 ; г) 32.

4. Обчислити $\log_5 35 - \log_5 7$:

а) 5; б) 28; в) 1; г) 245.

5. Знайти x , якщо $\log_6 x = 21\log_6 5$:

а) 25; б) 10; в) 12; г) 36.

6. Обчислити $4^{\log_2 5}$: а) 5; б) 25; в) 10; г) 20.

7. Якщо $\lg x = \frac{1}{2} \lg a - 3 \lg b + 4 \lg c$, то ...:

а) $x = \frac{2a\sqrt{c}}{3b}$; б) $x = \frac{\sqrt{a}}{b^3 c^4}$; в) $x = \frac{\sqrt{a} - c^4}{b^3}$; г) $x = \frac{\sqrt{a} \cdot c^4}{b^3}$.

8. Якщо $x = \frac{5ab^2}{\sqrt[3]{c^2}}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то ...

а) $\lg x = 5 + \lg a + 2 \lg b - \frac{2}{3} \lg c$; б) $\lg x = 5 + \lg a + 2 \lg b - \frac{3}{2} \lg c$;

в) $\lg x = \lg 5 + \lg a + 2 \lg b - \frac{2}{3} \lg c$; г) $\lg x = \lg 5 + \lg a + 2 \lg b - \frac{3}{2} \lg c$.

9. Якщо $\log_3 2 = a$ і $\log_3 5 = b$, то $\log_3 50 = \dots$

а) $a + 2b$; б) $2a + b$; в) $a^2 + b$; г) $a + b^2$.

10. Обчислити $\log_4 \log_2 16$: а) 0; б) 1; в) 4; г) 16.

Варіант 4

1. Який з виразів $a - c$ має зміст?

а) $\log_6(-0,1)$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 7$; в) $\log_{14} 0$; г) $\log_3(-5)^3$

2. Яка з рівностей $a - c$ неправильна?

а) $\lg 1 = 0$; б) $\log_7 64 = 6$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = 4$; г) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

3. Знайти x , якщо $\log_5 x = \log_5 16 + \log_{.5} 3$:

- а) 19 ; б) 48; в) 163 ; г) 316.
4. Обчислити $\log_7 98 - \log_7 2$:
а) 2 ; б) 96; в) 49; г) $\frac{1}{2}$
5. Знайти x , якщо $\log_7 x = 3 \log_7 5$:
а) 15; б) 21; в) 243; г) 125.
6. Обчислити $9^{\log_3 12}$: а) 24; б) 144; в) 6; г) 9.
7. Якщо $\lg x = \frac{1}{3} \lg a + 2 \lg b - 3 \lg c$, то ...:
а) $x = \frac{2ab}{9c}$; б) $x = \frac{\sqrt[3]{a} + b^2}{c^3}$; в) $x = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{c^3}$; г) $x = \sqrt[3]{a} + b^2 - c^3$.
8. Якщо $x = \frac{7a^3}{b^2 \sqrt[4]{c^3}}$, де $a > 0, b > 0, c > 0$, то...
а) $\lg x = \lg 7 + 3 \lg a - 2 \lg b - \frac{3}{4} \lg c$; б) $\lg x = 7 + 3 \lg a - 2 \lg b - \frac{3}{4} \lg c$;
в) $\lg x = \lg 7 + 3 \lg a - 2 \lg b - \frac{4}{3} \lg c$; г) $\lg x = \lg 7 + 3 \lg a - 2 \lg b + \frac{3}{4} \lg c$
9. Якщо $\log_3 2 = a$ і $\log_3 5 = b$, то $\log_3 60 = \dots$
а) $2a + b + 1$; б) $a + b^2 + 1$; в) $a + 2b + 1$; г) $a^2 + b$
10. Обчислити $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$: а) 1 ; б) 0 ; в) 27 ; г) -1.

IV. Тема: Логарифмічна функція, її графік і властивості

Організація вивчення нового матеріалу.

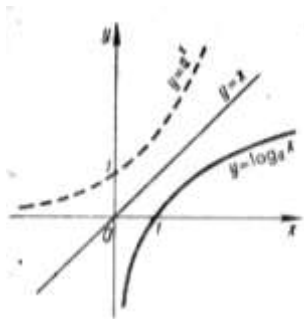
Повторити поняття оборотної функції, властивості обернених функцій ввести поняття логарифмічної функції.

Користуючись формулою показникової функції $y = a^x$ знайдемо формулу функції оберненої до даної, враховуючи те, що ця функція оборотна.

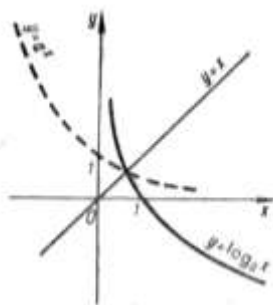
$$x = a^y ; \quad y = \log_a x, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Означення. Логарифмічною називається функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, обернена до показникової $y = a^x$

Побудуємо графік логарифмічної функції, використовуючи графік показникової функції і властивість графіків взаємно-обернених функцій (симетричні відносно прямої $y = x$).



Мал.1



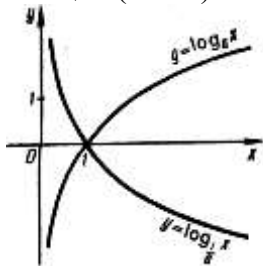
Мал.2

Побудову графіків виконують на дошці учні.

Можна використати комп'ютер для побудови графіків.

Властивості (за допомогою евристичної бесіди учні називають властивості за графіком):

- 1). $D(\log) = (0; +\infty)$;
- 2). $E(\log) = (-\infty; +\infty)$;
- 3). Якщо $a > 1$, то функція $y = \log a^x$ – зростає, а якщо $0 < a < 1$ – спадає;
- 4). Графік проходить через точку $(1; 0)$;
- 5). Функція $y = \log a^x$ є оберненою до показникової $y = a^x$
- 6). Графіки функцій $y = \log a^x$ та $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ симетричні відносно осі абсцис (мал.3)

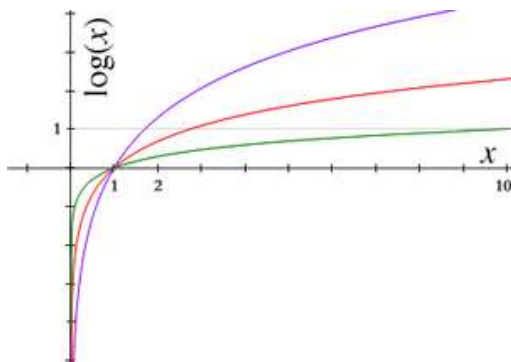


Мал..3

Логарифмічна **функція** $y = \log_a x$ ставить у відповідність кожному значенню змінної його логарифм за наперед обраною основою a .

На малюнку зображено графіки логарифмічної функції $y = \log_a x$ при різних значеннях a .

Графіки логарифмічної функції за основами e (червоний), 10 (зелений) та $1,7$ (фіолетовий). (мал..4)



Мал..4

V. Завдання для перевірки знань учнів з теми «Логарифмічна функція та її властивості»

Диктант

1. Логарифмом числа b за основою a називається...
2. Графік функції $y = \log_a x$ проходить через точку...
3. Функція $y = \log_a x$ зростає (спадає) якщо...
4. Функція обернена до $y = 3^x$ ($y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta}$) має вигляд (записати формулу)...
5. Вказати неправильну рівність:

а) $\log_2 16 = 4$;

а) $\log_3 27 = 3$;

б) $\log_3 \frac{1}{81} = 4$;

б) $\log_{0,5} 0,5 = 1$;

$$в) \log_{0,1} 0,1 = 0;$$

$$г) \lg 1000 = 3.$$

6. Подати в показниковій формі:

$$\log_2 64 = 6;$$

7. Знайти x:

$$а) \log_5 x = 2;$$

$$б) \log_3 27 = x;$$

8. Обчислити:

$$81^{\log_9 8}$$

9. Чи має зміст вираз:

$$а) \log_4(-64);$$

$$б) \log_6(-6)^2;$$

$$в) \log_2 0,125 = -3;$$

$$г) \lg 10000 = 5.$$

$$\log_5 25 = 2.$$

$$а) \log_3 x = 2;$$

$$б) \log_3 81 = x.$$

$$36^{\log_6 7}$$

$$а) \log_2(-4);$$

$$б) \log_8(-16)^2?$$

Виконати вправи:

1. Приведіть приклад логарифмічної функції, яка зростає на всій області визначення.
2. Приведіть приклад логарифмічної функції, яка спадає на всій області визначення.
3. Знайти область визначення виразів

$$а) \log_{\pi}(10 - 2x)$$

$$б) \log_5(9 - x^2)$$

$$в) \log_{0,3}(x^2 - 16)$$

$$г) \log_3(x - 4)$$

4. Порівняти числа

$$а) \log_2 5,2 \text{ і } \log_2 3,6$$

$$б) \log_{0,2} 6 \text{ і } \log_{0,2} 8$$

$$в) \log_{0,3} \sqrt{2} \text{ і } \log_{0,3} 0,3$$

$$г) \log_5 3 \text{ і } 1$$

$$д) \log_{\pi} 2,9 \text{ і } 1$$

5. Знайти область визначення виразів

а) $\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x - 3)$

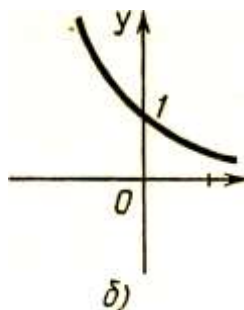
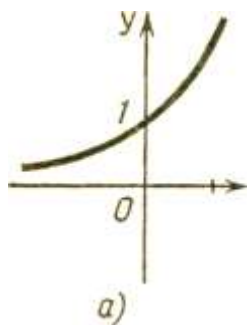
б) $\log \frac{2x+5}{x-1}$

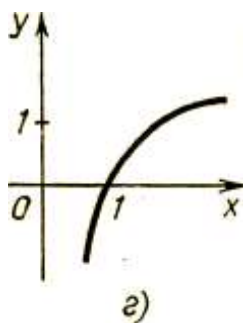
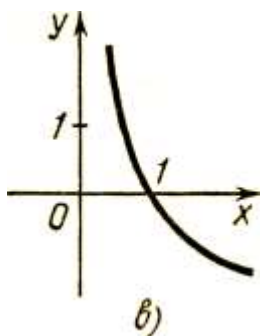
в) $\log_{0,6} \frac{2+3x}{5-2x}$

VI . Розглянемо деякі приклади застосування методу ПРЕС на уроках математики під час вивчення, закріплення теми «Логарифмічна функція».

Розв'язування вправ на застосування властивостей логарифмічної функції викликає в учнів певні труднощі. Просто перерахування властивостей цієї функції для подальшого їх застосування не дає результату. Тому доцільно розглянути вправи:

1). Який знак має значення функції $y = \log_{0,5} x$, якщо $x > 1$? На дошці подаються зображення графіків, з яких учень вибирає той, що задовольняє умову.





При цьому він проводить відповідні міркування:

-Я вважаю, що функція на даному інтервалі набуває від'ємних значень,

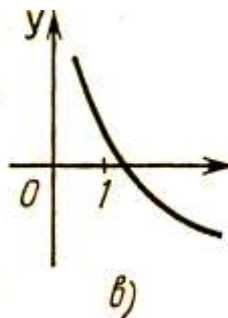
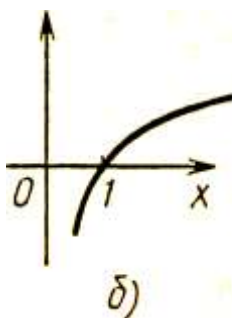
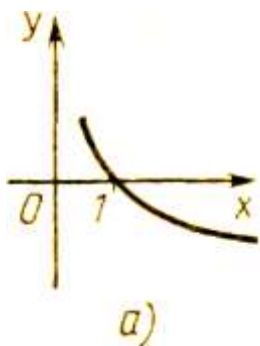
-тому що основа логарифмічної функції $a = 0,5$ меша від одиниці, і її графік має вигляд як на малюнку $\theta)$.

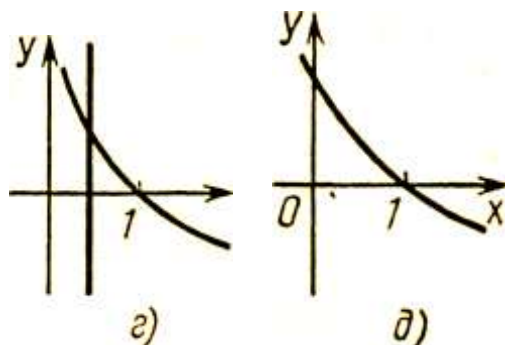
-Наприклад, всім відомо, що логарифмічна функція з основою $0 < a < 1$ спадає.

При $x > 1$ графік розміщений під віссю x .

-Отже, функція набуває на цьому інтервалі від'ємних значень.

2). Які з графіків не можуть бути графіком логарифмічної функції?





При такій постановці питання учні можуть дати досить аргументовані відповіді.

-Я вважаю, що графік зображений на мал. в)., не може бути графіком функції $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$,

- тому, що він не проходить через точку з координатами $(1;0)$.

-Наприклад, графік на мал. а). може бути графіком такої функції, бо проходить через точку $(1;0)$ і спадає.

-Отже, на мал. в) – не логарифмічна функція, а на мал. а)-логарифмічна.

Після вивчення теми можна провести усну контрольну роботу

УСНІ КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Усні контрольні роботи, як правило, проводяться після вивчення відповідного розділу теми або всієї теми. Учні готуються до цієї контрольної роботи заздалегідь. Викладач вказує на ті розділи тем, питання по яких ввійдуть до контрольної роботи.

Усні контрольні роботи можна проводити або по заздалегідь складеним карткам, або у вигляді фронтального опитування. В кожному випадку необхідно приготувати лист опитування, в якому проти прізвища учня вказується номер питання (і картки) і оцінка, отримана за відповідь. Такий лист дозволить врахувати відповіді і тих учнів, які будуть доповнювати і виправляти відповіді своїх товаришів.

На усну контрольну роботу відводиться 30—35 хв., а деколи і весь урок. Якщо робота проводиться по карткам, то час, витрачений

учнями на підготовку до відповіді, використовується для фронтального опитування учнів. Викладач викликає одночасно двох учнів, щоб не витрачати час при підготовці до відповіді другого учня.

Після закінчення роботи викладач оголошує і коментує оцінки, яких буває 8 - 12 в залежності від терміну виконання контрольної роботи. Нижче наводяться усні контрольні роботи по показниковій і логарифмічній функціям.

Показникова і логарифмічна функції

КАРТКА 1

1. Сформулювати теорему про логарифм добутку.
2. Яка властивість показникової функції $y=a^x$ пояснює розміщення графіка цієї функції над віссю X?
3. Обчислити $\log_2 \sin 90^\circ$.
4. Розв'язати рівняння $8^{x-3} = 9^{x-3}$

КАРТКА 2

1. Сформулювати теорему про логарифм частки.
2. Пояснити, чому графік логарифмічної функції розміщений вправо від осі Y.
3. Обчислити $\log_9 3$.
4. Розв'язати рівняння $7^x = 343$.

КАРТКА 3

1. Сформулювати теорему про логарифм степеня.
2. Через яку точку на осі X проходить графік логарифмічної функції $y=\log_a x$? Якою властивістю функції це пояснюється?
3. Обчислити $\log_{\frac{1}{7}} 7$.
4. Розв'язати рівняння $\lg x = 2 - \lg 5$.

КАРТКА 4

1. Сформулювати теорему про логарифм кореня.
2. Через яку точку на осі Y проходить графік функції $y=13^x$?
Якою властивістю функції це пояснюється?
3. Обчислити $\log_{0,2} 0,2$.
4. Розв'язати рівняння $\lg(x + \sqrt{5}) = -\lg(x - \sqrt{5})$.

КАРТКА 5

1. Дайте означення логарифмічної функції.
2. Чи перетинає графік функції $y=a^x$ вісь X ?
3. Знайти область визначення функції $y = \log_2 (2^x - 1)$.
4. Що більше: $a^{0,7}$ чи a^7 ?

КАРТКА 6

1. Дайте означення показникової функції.
2. Чи перетинає графік функції $y = \lg x$ вісь Y ?
3. Знайти область визначення функції $y = \lg \frac{\tilde{o}-1}{\tilde{o}+2}$
4. Що більше: $\log_7 5$ чи $\log_5 7$?

VII. Логарифмічні рівняння.

Означення. Логарифмічним рівнянням називається рівняння, яке містить невідому змінну лише під знаком логарифма.

Загального методу розв'язування логарифмічних рівнянь не існує, тому розглянемо кілька їх типів.

1) Рівняння виду $\log_a x = b$ де x — змінна, a, b — дійсні числа, називається найпростішим логарифмічним рівнянням.

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то таке рівняння при довільному дійсному значенні b має єдиний розв'язок $x = a^b$.

2) Рівняння виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Рівносильне системі:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Коренями рівняння є лише ті розв'язки, які задовольняють область допустимих значень рівняння, тобто систему нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

Під час розв'язування логарифмічних рівнянь може відбутися розширення області визначення, в результаті чого можуть з'явитися сторонні корені або звуження, що приводить до зникнення коренів. Тому, розв'язуючи логарифмічне рівняння слід бути особливо уважним і не допускати перетворень, що зумовлюють звуження області визначення рівняння.

У загальному випадку при розв'язуванні логарифмічних рівнянь є доцільною перевірка отриманих коренів за умовою рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\log_6(x + 5) = 2$.

Розв'язання. $\log_6(x + 5) = 2$,

отже, $x + 5 = 6^2 = 36$. Звідси $x = 31$.

Відповідь: 31.

Приклад 2. $\log_{0,5} \log_{16} \log_3 x = 2$.

Розв'язання. Маємо

$$\log_{16} \log_3 x = 0,5^2 = 0,25; \quad \log_3 x = 16^{0,25} = 2; \quad x = 3^2 = 9.$$

Відповідь: 9.

Приклад 3. $\log_{27} x + 2 = \log_3 x.$

Розв'язання. $\log_{27} x + 2 = \log_3 x + 2 = \frac{1}{3} \log_3 x + 2 = \log_3 x,$
отже, $\frac{2}{3} \log_3 x = 2; \quad \log_3 x = 3; \quad x = 3^3 = 27.$

Відповідь: 27.

Приклад 4. Визначити найбільший розв'язок рівняння
 $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

Розв'язання.

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = (3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 2 \cdot x^{\log_3 x} = 162,$$

звідси $x^{\log_3 x} = 81.$

Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 3:

$$\log_3 (x^{\log_3 x}) = \log_3^2 x = \log_3 81 = 4.$$

Звідси $\log_3 x = \pm 2, \quad x_1 = 3^2 = 9, \quad x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$

Відповідь: 9.

Приклад 6. Визначити $x + y$ якщо
$$\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини другого рівняння системи на 10: $10 \cdot x^{\lg y} = 40.$

Отже, $xy = 10 \cdot x^{\lg y}.$

Прологарифмуємо обидві частини отриманого рівняння за основою 10:

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y = \lg(10 \cdot x^{\lg y}) = \lg 10 + (\lg y) \cdot (\lg x) = 1 + (\lg y) \cdot (\lg x).$$

Далі $\lg x + \lg y - 1 - (\lg x)(\lg y) = 0;$

$$\lg x - 1 - \lg y(\lg x - 1) = (\lg x - 1)(1 - \lg y) = 0.$$

Можливі два випадки:

1) $\lg x = 1, x = 10, y = \frac{40}{x} = 4;$

2) $\lg y = 1, y = 10, x = \frac{40}{y} = 4.$

Отже, $x + y = 14.$

Відповідь: 14.

Самостійна робота

Варіант 1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12);$

б) $x^{\lg x} = 10;$

в) $\log_4 x + 3\log_2 x = 7;$

г) $\log_2(x^2 + 4x + 1) + 1 = \log_2(6x + 2).$

Варіант 2

Розв'яжіть рівняння:

а) $\lg(2x^2 + 3x) = \lg(6x + 2);$

б) $x^{\lg x} = 10000;$

в) $\log_9 x + 2\log_3 x = 5;$

г) $\log_2(x^2 - 3) + 1 = \log_2(6x - 10).$

Відповіді: **B - 1:** а) 6;-2; б) 10; 0,1; в) 4; г) 0.

B - 2: а) 2; б) 100; 0,01; в) 9; г) 2.

VIII. Логарифмічні нерівності.

Розв'язуючи логарифмічні нерівності, доцільно використати загальну схему рівносильних перетворень нерівностей. Ця схема іноді дає надмірну систему обмежень, яку можна суттєво спростити. Для рівносильності рівнянь надмірність системи обмежень майже не впливає на об'єм роботи щодо розв'язування цих рівнянь - можна не знаходити відповідні значення змінної з цих обмежень, а тільки перевіряти для кожного знайденого кореня. Розв'язком нерівності, як правило, є інтервал (або кілька інтервалів), які містять нескінчену множину чисел, а всі їх перевірити неможливо. Отже для розв'язування нерівності доведеться знаходити відповідні значення змінної з усіх записаних обмежень, і тому чим менше залишиться цих обмежень, тим краще. Бажаємо запропонувати учням не знаходити окремо область визначення нерівності, а спочатку записувати повну систему обмежень і рівносильну нерівність, а потім намагатися спростити утворену систему.

Колективне розв'язування нерівності

$$\log_2(4x^2 - 8x + 3) < 3.$$

Учні міркують так.

Число 3 можна подати у вигляді логарифма з основою 2:

$$3 = \log_2 2^3 = \log_2 8.$$

$$\text{Тоді} \quad \log_2(4x^2 - 8x + 3) < 3; \quad \log_2(4x^2 - 8x + 3) < \log_2 8.$$

Логарифмічна функція при основі, більшій від 1, зростаюча в області її визначення.

$$\text{За означенням зростаючої функції} \quad 4x^2 - 8x + 3 < 8.$$

Область визначення складеної логарифмічної функції знаходимо з нерівності $4x^2 - 8x + 3 > 0$.

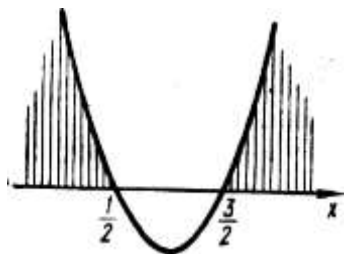
Отже, нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} 4\tilde{\delta}^2 - 8\tilde{\delta} + 3 < 8, \\ 4x^2 - 8x + 3 > 0 \end{cases}$$

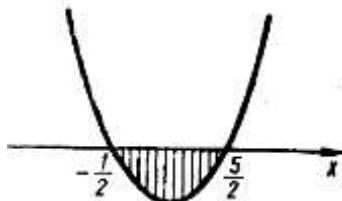
Знаходимо корені рівняння $4x^2 - 8x + 3 = 0$; $\tilde{\delta} = \frac{2}{3}$ $\tilde{\delta} = \frac{1}{2}$

Як видно з мал. 1, нерівність $4x^2 - 8x + 3 > 0$ має множину розв'язків

$$A = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$



Мал.1



Мал.2

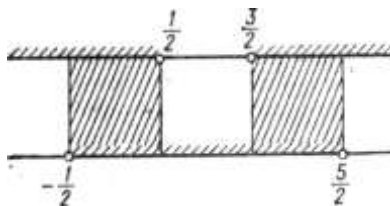
Знаходимо корені рівняння $4x^2 - 8x + 3 = 8$ або $4x^2 - 8x - 5 = 0$

$$\tilde{\delta} = \frac{5}{2} \quad \text{або} \quad \tilde{\delta} = -\frac{1}{2}$$

Як видно з мал. 2, нерівність $4x^2 - 8x - 5 < 0$ має множину розв'язків

$$B = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Множиною розв'язків системи (1), а отже, і даної нерівності, є переріз множин A і B розв'язків кожної з нерівностей системи



Мал. 3

(мал. 3)

Відповідь: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Тематична контрольна робота

Варіант 1

1. Обчислити:

а). $\lg 500 - \lg 5$

б). $2 \log_2 \frac{1}{8} + 3 \log_3 27$

2. Розв'язати рівняння:

а). $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) = -2$

б). $\log_4 x + \log_4 (x - 6) = 2$

3. Розв'язати нерівність:

$$\log_{0,5} (3x - 1) < \log_{0,5} (3 - x)$$

4. Знайти область визначення функції:

$$f(x) = \lg (6x - x^2) + \frac{1}{\lg(3 - x)}$$

Варіант 2

1. Обчислити:

а). $\lg 300 - \lg 3$

б). $2 \log_2 \frac{1}{4} + 3 \log_5 25$

2. Розв'язати рівняння:

а). $\log_{\frac{1}{3}} (3 - 2x) = -3$

б). $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$

3. Розв'язати нерівність: $\log_2 (3x - 2) > \log_2 (6 - 5x)$

4. Знайти область визначення функції:

$$f(x) = \lg(9x - x^2) - \frac{1}{\lg(5 - x)}$$

Варіант 3

1. Обчислити:

а). $\log_2 24 - \log_2 3$

б). $2 \log_5 25 + 3 \log_2 64$

2. Розв'язати рівняння:

а). $\log_{0,5} (3x - 2) = -2$

б). $\log_6 (x - 2) + \log_6 (x - 1) = 1$

3. Розв'язати нерівність: $\log_{0,8} (3x + 4) \geq \log_{0,8} (x + 2)$

4. Знайти область визначення функції:

$$f(x) = \frac{1}{\lg(x - 3)} + \lg(x^2 - 9)$$

Варіант 4

1. Обчислити:

а). $\log_3 36 - \log_3 4$

б). $3 \log_2 16 + 4 \log_3 27$

2. Розв'язати рівняння:

а). $\log_{0,2} (2x - 3) = -1$

б). $\log_3 (x - 3) + \log_3 (x - 1) = 1$

3. Розв'язати нерівність: $\log_{0,3} (2 - 3x) > \log_{0,3} (5x - 1)$

4. Знайти область визначення функції:

$$f(x) = \frac{1}{\lg(x + 2)} + \lg(x^2 - 4)$$

IX. Логарифмічна функція в природі, науці, техніці, мистецтві.

Хто ж і коли «придумав» логарифми?

Логарифм – з грецької означає “логос”- відношення і “аритмос”- число.

Його винахід пов'язаний з двома постатями: швейцарцем Іобстом Бюргі(1552-1632), знаним годинником і майстром астрономічних інструментів, і шотландцем Джоном Непером (1550-1617), який теж не був математиком за професією, астрономія була його «хобі». А Бюргі працював разом з астрономом Іоганном Кеплером. Саме величезний обсяг необхідних в астрономії обчислень і спонукав Бюргі і Непера шукати шляхів для їх спрощення. 20 років присвятив Непер своїм логарифмічним таблицям, аби, за його словами, «позбу-

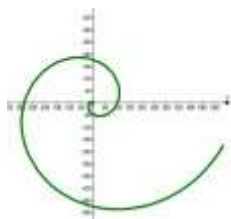
тися нудних і тяжких обчислень, відлякують зазвичай багатьох від вивчення математики». Обидва автори прийшли до своїх таблиць незалежно один від одного. Вони склали таблиці так званих натуральних логарифмів. Бюргі працював над таблицями 8 років і видав їх у 1620 році під назвою «Арифметична і геометрична таблиця прогресії». Проте його таблиці не отримали широкого поширення, бо Непер видав свій «Опис дивовижної таблиці логарифмів» на 6 років раніше. Тому і визнали число e неперовим числом.

Ідея десяткових логарифмів виникла у професора лондонського коледжу Генрі Брігса (1561-1630) після ознайомлення з таблицями Непера. Він двічі побував у Непера, здружився з ним і в процесі спільних занять обидва розробили нову, практично зручнішу десяткову систему, засновану на порівнянні прогресії.

Брігс взявся розробити велику таблицю десяткових логарифмів. Уже в 1617 р. він опублікував восьмизначні таблиці логарифмів від 1 до 10^3 , а в 1624 році спромігся видати «Логарифмічну арифметику», що містила чотирнадцятизначні таблиці логарифмів для чисел 1-20000 і 90000-100000.

Понад три з половиною сторіччя з тих пір, як у 1614 році були опубліковані Непером перші логарифмічні таблиці, вони вірою і правдою служили астрономам і геодезістам, інженерам і морякам, скорочуючи час на обчислення і, як сказав французький вчений Лаплас (1749-1827), продовжуючи життя обчислювачам.

Ще донедавна важко було уявити собі інженера без логарифмічної лінійки в кишені. Винайдена в 1624 році англійським математиком Едмундом Гунтером (1581-1626), вона дозволяла швидко одержувати відповідь з достатньою для інженера точністю до трьох значущих цифр. І хоч тепер її витіснили калькулятори і комп'ютери, проте можна сміливо сказати, що без логарифмічної лінійки не було і перших комп'ютерів.



Логарифмічна спіраль – це крива, яка перетинає всі кути, що виходять із однієї точки O , під одним і тим же кутом α .

Рівняння (в полярних координатах) має вигляд:

$$\rho = ae^{k\varphi}$$

Таку криву описує рухома точка, відстань від полюса якої росте в геометричній прогресії, а кут, що описується її радіусом-вектором, - в арифметичній.

Характерні особливості логарифмічної спіралі:

- ✓ Має нескінченну кількість витків як при розкручуванні так і при скручуванні;
- ✓ Не проходить через свій полюс;
- ✓ Її називають рівнокутною спіраллю;
- ✓ В будь-якій точці спіралі кут між дотичною до неї та її радіус-вектором зберігає постійне значення;
- ✓ При різних перетвореннях (гомотетії, повороті) вона залишається незмінною.
- ✓ Має широке застосування в технічних приладах.
- ✓ Властивості цієї кривої так вразили Якоба Бернуллі, що він назвав її *spira mirabilis* (чудова спіраль) і заповів зобразити її на його могилі з написом *Eatemmутата resurgo* (перетворена, відроджуюся знову).

Логарифмічна функція зустрічається в найрізноманітніших галузях науки – фізиці, хімії, біології, медицині, мистецтві.

Відчуття, які сприймаються органами чуттів, можуть викликатися подразненнями, що відрізняються одне від одного в мільярди разів. Удари молота по сталевій плиті в 100 млрд. разів голосніші, ніж шелест листя, а яскравість вольтової дуги в трильйони разів більша, ніж яскравість слабенької зірочки на нічному небі. Якби відчуття були пропорційні подразненням, то ніякі фізіологічні процеси не дозволили б дати такого діапазону відчуттів. Досліди показали, що організм ніби «логарифмує» подразнення. Це означає, що величина відчуттів приблизно пропорційна логарифмам величини подразнень.

А зараз дещо несподіване повідомлення **«Логарифми і ... музика».**

Розкопуючи одне з поселень кам'яного віку на території Украї-

ни, археологи знайшли кілька кісток мамонта, призначення яких було їм незрозуміле. Лише уважний аналіз показав, що на цих кістках залишилися сліди ударів — це були залишки шумового оркестру, під звуки якого стародавні люди виконували магичні танці. Пізніше помітили, що більш приємні звуки можна отримати, зробивши барабан або просвердливши шматок дерева, щоб вийшла сопілка. А звучання тятиви лука? Воно навело на думку про створення струнних інструментів.

Піфагор був не тільки великим математиком, а й хорошим музикантом. Він встановив, що приємні сполучення звуків відповідають певним співвідношенням між довжинами струн, що коливаються, або відстанями між дірочками сопілки. Саме він створив першу математичну теорію музики, і хоча музиканти не дуже люблять перевіряти «алгеброю гармонію», вони весь час мають справу з математикою, бо сучасна гама ґрунтується на логарифмах. *На екрані зображення клавіш.*

Будемо називати найнижчу октаву нульовою; а кількість коливань ноти *йо* цієї октави за 1 секунду приймаємо за 1. Тоді нота *до* першої октави буде робити в 2 рази більше коливань. Позначимо всі ноти хроматичної гами номерами p , приймаючи за нульовий основний тон кожної гами. Тоді тон *сол* буде 7-й, *ла* — 9-й і т.д., 12-й тон буде знову *до*, тільки октавою вище.

Тому кожен наступний тон в $\sqrt[12]{2}$ разів має більше коливань, ніж попередній.

Позначимо N_{pm} — кількість коливань тону з номером p із m -ї октави.

$$N_{pm} = 2^m \left(\sqrt[12]{2} \right)^p = 2^m \cdot 2^{\frac{p}{12}} = 2^{m + \frac{p}{12}}$$

Прологарифмуємо обидві частини останньої рівності:

$$\log_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}$$

Звідси видно, що номери клавіш рояля являють собою логарифми кількості коливань відповідних звуків. Номер октави — характеристика (тобто ціла частина) логарифма, а номер звука в даній октаві — його мантия (тобто дробова частина).

З логарифмічною функцією зв'язано багато видатних кривих. Щоб їх одержати, треба користуватися не декартовими, а полярними

координатами.

Щоб задати систему полярних координат, вибирають точку O (полюс) і з неї проводять промінь (полярну вісь). Положення точки M на площині визначається двома числами: відстанню r від O до M і кутом φ між променем OM і полярною віссю (в радіанах).

Визначення положення точки за її полярними координатами використовували, по суті, стародавні астрономи — довгота і широта і є полярними координатами на сфері. І зараз цими координатами користуються в походах за азимутом.

Там, де зараз у Києві знаходиться міст Метро, до війни прикрашав Дніпро перший капітальний міст, який називався Ланцюговим. Його збудував у 1853 році англійський інженер де Віньйоль. У 1920 році білополяки висадили красень-міст у повітря. 1925 року під керівництвом Є. О. Патона міст було відбудовано, але на початку Великої Вітчизняної війни він знову був зруйнований.

Чому цей міст називався Ланцюговим?

Річ у тім, що ланцюг, вагою якого можна знехтувати і який підтримує рівномірно розподілений вантаж, провисає по параболі. Якщо ж прогин нитки викликаний її власною вагою, то форма нитки задається рівнянням:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

a — стрілка прогину, T_0 — натяг нитки в найнижчій точці, y — її лінійна густина.

Мотузка, підвішена за кінці, телеграфний провід між двома стовпами, гнучкі нерозтягнуті нитки провисають по цій кривій, яка називається ланцюговою лінією. Якщо стрілка прогину не дуже велика, то її форма нагадує параболу. Тому Галілей вважав, що ланцюгова лінія збігається з параболою. Але Гюйгенс довів, що це не так. При обертанні ланцюгової лінії навколо осі абсцис утворюється поверхня, яка називається *катеноїдом* («катена» — італійською «ланцюжок»). Ця поверхня має найменшу площу в порівнянні з усіма поверхнями, що проходять через 2 даних кола. Форму катеноїда приймає мильна плівка, обмежена двома кільцями.

ФІЗИКА

Фізика завжди вимагає математичних розрахунків, тому знання математики у фізиці завжди необхідне. Ось декілька формул, де використовуються логарифми.

✓ **Робота, яку виконує газ при ізотермічному процесі**

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{\mu} RT \frac{P_1}{P_2}$$

m – маса газу;

μ – молярна маса газу;

R – універсальна газова стала;

T – температура за Кельвіном;

V – об'єм газу;

P – тиск газу.

✓ **Ємність циліндричного конденсатора:**

$$C = \frac{2l\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}$$

L – висота циліндра;

R, r – радіуси внутрішнього та зовнішнього циліндра;

ϵ – техн. характеристики конденсатора;

✓ **Ємність дільниці одиничної довжини двох провідної лінії**

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{L}{r}\right)}$$

r – радіус провідника

✓ **Зв'язок між сталою розпаду λ , середнім часом життя τ і періодом піврозпаду T**

$$\lambda = \frac{t}{\tau} = \frac{\ln 2}{T}$$

τ – середній час життя;

T – період піврозпаду;

✓ **Рівень інтенсивності звуку**

$$L = 10 \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$I_0 = 10^{-12} \text{ Вт} / \text{м}^2$ - умовно нульовий рівень

✓ Ентропія

$$S = k \ln \Omega$$

k – стала Больцмана;

Ω - термодинамічна імовірність ;

S – ентропія;

✓ Зміна ентропії при ізотермічному стисканні газу

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V}{V_0}$$

R – універсальна газова стала

μ - молярна маса газу

m – маса газу;

V – об'єм газу

У техніці часто застосовуються ножі, що обертаються. Сила, з якою вони тиснуть на матеріал, що розрізається, залежить від кута розрізання, тобто кута між лезом ножа і напрямом швидкості обертання. Для того, щоб тиск був сталим, потрібно щоб залишався сталим кут розрізання, а це буде у тому випадку, коли леза ножів будуть окреслені по дузі логарифмічної спіралі. Завдяки цьому лезо ножа сточується рівномірно.

Якщо літак буде летіти, дотримуючись весь час одного курсу, тобто перетинаючи всі меридіани під одним і тим самим кутом, то його шлях зобразиться на карті логарифмічною спіраллю.



У гідротехніці по логарифмічній спіралі вигинають трубу, що підводить потік до турбіни. Завдяки такій формі труби втрати енергії при зміні напрямку течії в трубі виявляються мінімальними і напір використовується з максимальною продуктивністю.

Хімія

Розчини в природі можуть мати різну реакцію середовища: кислу, лужну, нейтральну, що характеризується різною концентрацією

йонів Гідрогену $C(H^+)$. Для зручності датським біохіміком С.Сьоренсенем у 1909 році було введено термін «водневий показник» (рН), –це значно спростило роботу багатьом поколінням хіміків.

Водневий показник - це від'ємний десятковий логарифм концентрації йонів Гідрогену

$$pH = - \lg C(H^+)$$

Значення рН може змінюватись від 1 до 14

Наприклад, $C(H^+) = 10^{-7}$, $pH = 7$;

$C(H^+) = 10^{-2}$, $pH = 2$.

У нейтральному – $pH = 7$.

У кислому середовищі $pH < 7$, у лужному $pH > 7$,

Показник рН в біологічних розчинах

Рідина	рН	Рідина	рН
Шлунковий сік	1,4	Сеча	6,0
Сік лимона	2,1	Слина,молоко	7,4-8
Сік яблук "Ан-тонівка"	2,5	Слюзи	7,0
Томатний сік	4,1	Кров	7,4

З таблиці видно, що різні розчини в людському організмі мають різний рН, його відхилення від норми спричиняє захворювання і навіть загибель організму. Людям з підвищеною кислотністю шлункового соку рекомендується пити мінеральну воду з меншою концентрацією йонів H^+ (тобто з вищим рН), а зі зниженою кислотністю - "кислішу" воду (з нижчим рН).

Використовуючи різні засоби особистої гігієни, креми для шкіри, ліки, необхідно враховувати значення рН. Більшість рідких косметичних засобів має рН 5,5. Відповідний вміст у них катіонів H^+ оптимальний для нашої шкіри.



У сільському господарстві кислотність ґрунтового розчину є одним із головних чинників, що впливають на врожай. Так, картопля найкраще росте на слабокислих ґрунтах ($pH \approx 5$), а буряк на нейтральних ($pH \approx 7$).

БІОЛОГІЯ

Живі істоти зазвичай ростуть в усіх напрямках, зберігаючи свою форму. Але мушлі (раковини) морських тварин можуть рости лише в одному напрямі. Щоб не дуже витягуватися в довжину, їм доводиться скручуватися, причому зростання відбувається так, що зберігається подібність мушлі з її початковою формою. А таке зростання може відбуватися лише по логарифмічній спіралі або її просторовим аналогам. Тому мушлі всіх моллюсків, равликів, а також роги архарів закручені по логарифмічній спіралі. Можна сказати, що ця спіраль є математичним символом співвідношення форми і зростання.

Великий німецький поет Йоганн-Вольфганг Гете вважав її символом життя і духовного розвитку.

Логарифмічна функція виникає у зв'язку з найрізноманітнішими природними формами. По логарифмічних спіралях розташовуються квітки в суцвіттях соняшника, закручуються раковини молюска *Nautilus*, роги гірського барана і дзьоби папуг. Один з павуків, епейра, спілітаючи павутиння, закручує нитки навколо центра по логарифмічних спіралях.



Нічні метелики, які пролітають величезні відстані, орієнтуючись по паралельним промінням місяця, інстинктивно зберігають прямий кут між напрямом руху і променем



світла. Якщо вони орієнтуються на точкове джерело світла, інстинкт їх підводить, і метелики потрапляють в полум'я по логарифмічній спіралі, що скручується.

По логарифмічних спіралях закручені багато галактик, зокрема Галактика, до якої належить наша Сонячна система.

Справді, безмежні застосування логарифмічної функції у різних галузях природи, науки, техніки, мистецтва.

Додатки

Методичні розробки уроків

Тема: Логарифмічна функція, її графік і властивості.

Мета: Ввести поняття логарифмічної функції, її властивості, формувати вміння будувати графік логарифмічної функції.

Виховна мета: Сприяти вихованню культури поведінки, письма, мови.

Обладнання: Карти індивідуальних завдань, картки – завдання для усних вправ.

Хід уроку

I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірка наявності письмового домашнього завдання.

III. Актуалізація опорних знань.

2 учні біля дошки працюють з картками

1) 1. Побудувати схематично графік функції.

$$y = a^x, \quad a > 1.$$

2. Яка функція називається оборотною?

3. Означення логарифма.

2) 1. Побудувати схематично графік функції.

$$y = a^x, \quad 0 < a < 1$$

2. Як розміщені графіки взаємно обернених функцій?

3. Означення логарифма.

Усні вправи:

1. За означенням логарифма вказати, яке з трьох тверджень справедливе:

1. логарифм – степінь;
 2. логарифм – показник степеня;
 3. логарифм основа степеня.
2. Дано рівність $27^{\frac{2}{3}} = 9$. Що тут є логарифмом, якого числа і за якою основою?
3. Довести, що $\log_a a = 1$
4. Чи правильна рівність: а). $\log_4 16 = 24$
 б). $\log_5 125 = 3$
 в). $\lg 1 = 0$
5. Чи мають зміст вирази: а). $\log_5 (-125)$;
 б). $\log_5 0$;
 в). $\log_2 (-4)^3$;
6. Обчислити: $9^{\log_9 8}$

III. Мотивація навчання.

Математика – це всеосяжна наука, без знання якої неможливо ні пізнати оточуючий нас світ, ні забезпечити науково – технічний прогрес. Одним із понять математики, яке розкриває красу природи, її загадки, досягнення науки і техніки, мистецтва є логарифмічна функція.

Оголошую тему і мету уроку.

IV. Організація вивчення нового матеріалу.

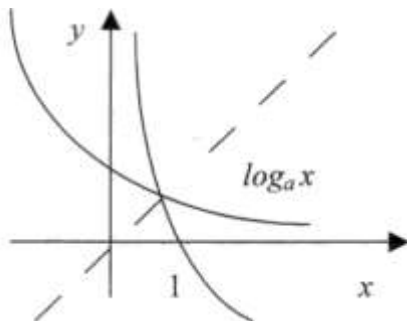
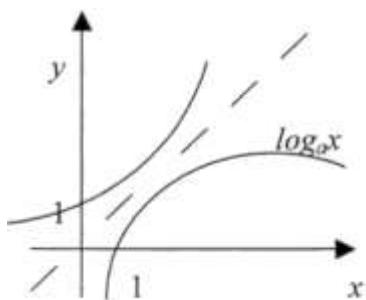
Користуючись формулою показникової функції $y = a^x$ знайдемо формулу функції оберненої до даної, врахуючи те, що ця функція оборотна.

$$x = a^y ; \quad y = \log_a x, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Означення. Логарифмічною називається функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$,

обернена до показникової $y = a^x$

Побудуємо графік логарифмічної функції



Властивості:

- 1). $D(\log) = (0; +\infty)$;
 - 2). $E(\log) = (-\infty; +\infty)$;
 - 3). Якщо $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ – зростає, а якщо $0 < a < 1$ – спадає;
 - 4). Графік проходить через точку $(1; 0)$;
- Повідомлення учнів про логарифмічну функцію в природі, науці, техніці, мистецтві. (Додається. Демонструється графік логарифмічної спіралі).

V. Організація закріплення нових знань.

1). Порівняти графіки функцій:

- а). $y = 2^{\log_a x}$ і $y = x$;
- б). $y = \log_9 x^2$ і $y = 2 \log_9 x$;

2). Знайти область визначення функцій:

- а). $y = \log_{0,3} (7 - 3x)$

$$7 - 3x > 0$$

$$3x < 7$$

$$x < \frac{7}{3}$$

$$x < 2\frac{1}{3}$$

$$D(y) = (-\infty; 2\frac{1}{3})$$

- б). $y = \log_5 (9 - x^2)$

$$9 - x^2 > 0$$

$$9 - x^2 = 0$$

$$(3 - x)(3 + x) = 0$$

$$x = 3 \quad x = -3 \quad D(y) = (-3; 3)$$

3). Розв'язування вправ самостійно: № 215 (1,2)

4). Додаткове завдання: № 227 (7).

VI. Диктант

1. Логарифмом числа b за основою a називається...
2. Графік функції $y = \log_a x$ проходить через точку...
3. Функція $y = \log_a x$ зростає (спадає), якщо...
4. Функція обернена до $y = 3^x$ ($y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$) має вигляд...

5. Вказати неправильну рівність:

- | | |
|---------------------------------|----------------------------|
| а). $\log_2 16 = 4$; | а). $\log_3 27 = 3$ |
| б). $\log_3 \frac{1}{81} = 4$; | б). $\log_{0,5} 0,5 = 1$; |
| в). $\log_{0,1} = 0$; | в). $\log_2 0,125 = -3$; |
| г). $\lg 1000 = 3$; | г). $\lg 1000 = 5$; |

6. Подати в показниковій формі:

$$\log_2 64 = 6; \quad \log_5 25 = 2;$$

7. Знайти x :

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| а). $\log_5 x = 2$; | а). $\log_3 x = 2$; |
| б). $\log_3 27 = x$; | б). $\log_3 81 = x$. |

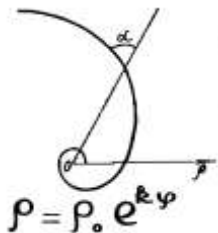
8. Обчислити:

$$81^{\log_9 8} \quad 36^{\log_6 7}$$

9. Чи має зміст вираз:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| а). $\log_4 (-64)$; | а). $\log_2 (-4)$; |
| б). $\log_6 (-6)^2$; | б). $\log_8 (-16)^2$. |

VII. Домашнє завдання. Вправи № 140, 154, 156, §4 (Г.П.Бевз, 11).



Графік логарифмічної спіралі.

Тема уроку: Логарифм числа. Основна логарифмічна тотожність.

Тип уроку: комбінований (вивчення нових знань, розвиток навичок, контроль

рівня сприйняття вивченого на уроці.)

Обладнання: таблиця степенів чисел з натуральними показниками, таблиця, комп'ютер, мультимедійний проектор, роздатковий матеріал, виставка рефератів, презентація «Логарифм числа. Основна логарифмічна тотожність».

Дидактична мета:

Ввести поняття логарифма та основної логарифмічної тотожності. Навчитися розв'язувати вправи різного рівня складності з використанням вивченого, набуття навичок обчислення виразів за допомогою означення логарифма числа та основної логарифмічної тотожності.

Розвиваюча мета:

Сприяти розвитку творчих здібностей учнів, логічного мислення, вміння аналізувати і синтезувати наукові ідеї; розвивати

пам'ять, увагу, спостережливість, уміння обґрунтовувати і доводити справедливість свого твердження, виконувати узагальнення і систематизацію отриманих знань;

Виховна мета:

Сприяти вихованню старанності, цілеспрямованості, наполегливості у досягненні поставленої мети, математичної грамотності і культури мовлення, тактовності.

Підготовка до уроку.

1. Кожний учень готує дома таблицю степенів чисел. (додаток 1)
2. Цю таблицю вчитель збільшеного розміру виготовляє і розміщує у класі збоку дошки. (Таблиця виготовлялася спочатку для теми степенева і показникові функція і в учнів вона вже повинна бути)
3. Окремі учні одержують завдання написати реферати.

Хід уроку

1. Організація класу.

2. Актуалізація опорних знань учнів.

Усний рахунок:

$$1). \quad 2^4 = 16; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9; \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}; \quad 0,2^2 = 0,04;$$

$$(\sqrt{5})^0 = 1$$

$$2). \quad x^3 = 8; \quad x^5 = 243; \quad x^{-7} = 128;$$

$$x = 2$$

$$x = 3$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$3). \quad 2^x = 16; \quad 5^x = 625; \quad 5^x = 1;$$

$$x = 4$$

$$x = 4$$

$$x = 0$$

- Що допомогло вам виконати вправи?

(Складена раніше таблиця степенів чисел.)

- (Що об'єднає всі вправи?)

(Всі вправи стосуються степеневих рівнянь. Друга та третя вправи є оберненими до першої вправи.)

Пропоную вираз: 6^5 . Назвати степінь, основу степеня, показник степеня.

Проблемна ситуація.

Пропоную розв'язати рівняння:

а). $5^x = 25$ і б). $2^x = 7$.

Учні легко розв'язують рівняння а). $x = 2$.

А як розв'язати рівняння б), адже немає такого показника степеня піднісши до якого число 2 одержимо 7.

Розв'язати таке рівняння зможемо після вивчення поняття логарифма.

3. Мотивація навчальної діяльності.

Сьогодні нас буде цікавити саме вправа третього виду. Як розв'язати таке рівняння?

Отже, запишіть у зошиті тему уроку: «Логарифм числа. Основна логарифмічна тотожність».

Учні приготували реферати про історію виникнення логарифмів. Надамо їм слово для хвилинного виступу з короткими тезами за цими рефератами.

Вчитель оцінює виступи учнів.

4. Вивчення нового матеріалу:

Демонструється презентація з коментуванням вчителя

Отже, рівняння $2^x = 7$, x – це показник степеня до якого потрібно піднести 2, щоб одержати 7.

А цей показник ми назвемо логарифмом і запишемо $x = \log_2 7$.

Це рівняння можна розв'язати графічно. (На екрані)

$$5^3 = 125, \text{ то } \log_5 125 = 3, \quad \text{або } 7^{-2} = \frac{1}{49}, \text{ тому}$$

$$\log_7 \frac{1}{49} = -2$$

$$6^0 = 1, \text{ тому } \log_6 1 = 0$$

До якого степеня потрібно піднести число:

$$3^2 = 9, \quad 3^2 = 9; \quad 2^3 = 8, \quad 2^3 = 8; \quad 4^2 = 0,25, \quad 4^{-1} = 0,25$$

В кожному випадку показник степеня ми будемо називати логарифмом.

Означення.

Логарифмом числа N за основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$ називається показник степеня x , до якого треба піднести a , щоб дістати число N .

$$\text{Записують } \log_a N = x$$

Це правило ви повинні знати напам'ять, попробуйте повторити його без підручника.

- Наводимо приклади логарифмів.

$$\log_3 27 = 3;$$

$$\log_3 9 = 2;$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2};$$

$$\log_5 \frac{1}{125} = -3;$$

$$\log_5 25 = 2;$$

$$\log_{-2} (-8) - \text{ не існує};$$

- $\log_a N$, де $a > 0$ і $a \neq 1$ має зміст лише при $N > 0$.

- $\log_a N = b$ і $a^b = N$ виражають одне і теж саме.

Ці рівності є рівносильними.

За цими рівностями можна розв'язати три задачі:

4) знайти b

5) знайти a

6) знайти N

$\log_a a = 1$, бо $a^1 = a$ логарифмічна одиниця,

$\log_a 1 = 0$, бо $a^0 = 1$ логарифмічний нуль.

- Логарифм за основою 10 прийнято записувати зручніше:

$\log_{10} a = \lg a$ – десятиковий логарифм

$$\log_{10} 100 = \lg 100 = 2; \quad \lg 10 = 1; \quad \lg 1 = 0$$

- Логарифм за основою e прийнято записувати:

$\log_e a = \ln a$ – натуральний логарифм, $e \approx 2,7$

$$\ln e = 1, \quad \ln 1 = 0.$$

Перехід від логарифмічного рівняння до показникового:

$$\log_a b = x,$$

$$a^x = b$$

$a^{\log_a b} = b$ – основна логарифмічна тотожність, яку треба знати

напам'ять.

Наприклад,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_1 16} = 16, \quad 5^{\log_5 8} = 8$$

Наведіть свої приклади основної логарифмічної тотожності.

Учні наводять приклади.

5. Набуття умінь та навичок застосування означення логарифма та основної логарифмічної тотожності.

1). Розв'язування вправ з підручника: № 177 (по 2 учні біля дошки);

2). Робота в парі: №178;

3). Усно: №179; 181

4). Колективно: №180

Учні, які справились швидше, розв'язують №182, №183, №184, №185.

5). Знайти логарифми числа.

Учні записують:

$$\log_5 \frac{1}{125} = -3;$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2};$$

$$\log_{0,3} \frac{1}{0,09} = -2;$$

$$\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4};$$

$$\log_{144} 12 = \frac{1}{2}$$

6). Визначити x:

Учень виконує на дошці, вчитель проводить обговорення:

$$1) \log_2 x = 3$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

$$2) \log_{13} x = -1$$

$$x = 13^{-1}$$

$$x = \frac{1}{13}$$

$$3) \log_{14} x = 0$$

$$x = 14^0$$

$$x = 1$$

$$4) \log_5 x = 1$$

$$x = 5^1$$

$$x = 5$$

7). Визначити x:

Учень виконує на дошці:

$$1) \log_x 8 = 3; \quad x = \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$2) \log_x \frac{1}{4} = -2 \quad x = \left(\sqrt{\frac{1}{4}} \right)^{-1} = 2;$$

$$3) \log_x 20 = 1; \quad x = 20;$$

$$4) \log_x 0,04 = -2 \quad x = (0,04)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0,04}} = \frac{1}{0,2};$$

$$5) \log_x 3 = \frac{1}{4} \quad x = 3^4 = 81.$$

8). Обчислити:

$$\log_{36} 216 - \frac{1}{3} \log 0,001 - \frac{1}{5} \log_{0,5} 32 = 2 - \frac{1}{3}(-3) - \frac{1}{5}(-5) = 4$$

9). Обчислити:

$$4) \quad 7^{\log_7 8} = 8;$$

$$49^{\log_7 5} = (7^{\log_7 5})^2 = 5^2 = 25;$$

$$4^{3 \log_4 2 + 1} = (4^{\log_4 2})^3 4^1 = 2^3 4 = 32;$$

6. Самостійна робота (тести)

(учні виконують на листочках і здають)

I-В

II-В

Обчислити:

$$\log_3 \frac{1}{27}$$

1)

1). $\log_2 16$ A) 3; Б) -3; В) $\frac{1}{3}$; Г) 9

A) 3; Б) 5; В) 4; Г) 8

2) $\lg 1000 + \log_{14} 14 - 2\log_7 \frac{1}{343}$;2) $\log_{169} 13 - \log_3 \frac{1}{81} + 2\log_3 3$;A) 3; Б) -2; В) $\frac{1}{3}$; Г) 10A) 3; Б) $-1\frac{1}{2}$; В) 4; Г) $6\frac{1}{2}$ 3) $6^{\log_6 2}$;3) $8^{\log_8 5}$;A) 3; Б) -3; В) $\frac{1}{3}$; Г) 2A) 8; Б) -5; В) $\frac{1}{5}$; Г) 54) $5^{3\log_5 10}$;4) $2^{\frac{1}{2}\log_2 9}$;

A) 30; Б) 3; В) 1000; Г) 10

A) 3; Б) 2; В) $\frac{1}{2}$; Г) 95) $36^{1+\log_6 2}$;5) $25^{\log_5 3-1}$.

A) 144; Б) 36; В) 38; Г) 6

A) 125; Б) -3; В) $\frac{9}{25}$; Г) 5

6). Розв'яжіть рівняння:

$$4^x = 7$$

$$3^x = 8$$

A) $\frac{7}{4}$; Б) $\frac{4}{7}$; В) $\log_4 7$; Г) $\log_7 4$ A) $\frac{8}{3}$; Б) $\frac{3}{8}$; В) $\log_8 3$; Г) $\log_3 8$

7. Підсумок уроку

Вчитель оголошує результати роботи на уроці, аналізує допущені помилки.

8. Домашнє завдання.

1) Знати відповіді на запитання №1-5 §21, стор 211-214

2) Виконати вправи. №176, 186, 187, 194

(для додаткової роботи) №

188,189,190,191

(Презентація додається)

Тема: Розв'язування логарифмічних рівнянь

Мета уроку: Формування умінь учнів розв'язувати логарифмічні рівняння різними методами;

сприяти розвитку в учнів інтелектуальних та творчих здібностей;

сприяти вихованню доброзичливості і відповідальності за результати своєї роботи.

Обладнання: Персональний комп'ютер, мультимедійний проектор, картки з літерами.

Хід уроку.

Епіграф уроку: Математика – знаряддя, за допомогою якого людина пізнає і підкоряє собі навколишній світ...

Годфрі Харді Харолд (англ. математик)

I. Перевірка домашнього завдання.

В кінці уроку збираю зошити для перевірки виконання домашнього завдання.

II. Актуалізація опорних знань.

Повторюємо найпростіші логарифмічні рівняння, методи розв'язування логарифмічних рівнянь, означення логарифма.

На екран проектується інформація:

Означення логарифма

$$\log_a b = x; \quad a^x = b$$

Найпростіші логарифмічні рівняння

$$\begin{array}{ll} 1) \log_a x = m, & 2) \log_a x = \log_a m, \\ x = a^m; & x = m. \end{array}$$

III. Мотивація навчання.

Знання з математики допомагають людині жити в сучасному світі, пізнавати всі його дива і таємниці. Саме «Математика – знаряд-

дя, за допомогою якого людина пізнає і підкоряє собі навколишній світ...» Годфрі Харді Харолд (англ. математик)

Сьогодні ми проведемо незвичайний урок, урок-гру «Поле чудес», під час якого познайомимось з іменами видатних людей, які зробили вагомий внесок у розвиток математичної науки.

IV. Гра "Поле чудес".

Гра проходить у три тури.

1 тур. (відбірний). У цьому турі приймають участь всі учні класу. Вони повинні відгадати слово. Щоб відкрити букву треба правильно розв'язати завдання і за відповіддю знайти потрібну букву. Клас розбивається на три команди. Перша команда, яка правильно виконала всі завдання і склала потрібне слово оголошується переможцем і отримує найбільшу кількість балів.

Завдання 1 туру. Відгадайте прізвище французького математика, юриста за освітою, який вдосконалив методи розв'язування рівнянь, в тому числі квадратних.

Завдання проектується на екран, розв'язуються усно. Після цього розв'язання проектується на екран.

1) $\log_5 x = 2$; $x = 5^2 = 25$.

2) $\log_x \frac{1}{2} = 1$; $x^1 = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$

3) $\log_{13} x = 0$; $x = 13^0$, $x = 1$

4) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$, $x = -2$

1	2	3	4
---	---	---	---

Відповідь.

I) $\frac{1}{2}$

B) 25

Є) 1

M) 6

T) -2

(кожній відповіді відповідає літера)

Зашифроване слово: Вієт



Франсуа Вієт (1540 – 1603)

За допомогою проектора демонструється фотографія вченого.

2 тур. Учні розв'язують рівняння, які спроектовані на *екран*. Першою починає команда-переможець.

Завдання 2 туру.

Відгадайте прізвище швейцарського математика, астронома і механіка, який майже одночасно з Дж. Непером винайшов логарифми і почав їх застосовувати.

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Розв'яжіть рівняння:

Усно: 1) $\log_{1/2} x = -3$; $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $x = 8$.

Відповідь: 8

Самостійно: 2) $\log_3(2x + 1) = 2$; $2x + 1 = 3^2$;
 $2x + 1 = 9$;
 $2x = 8$; $x = 4$.

Відповідь: 4

Колективно на дошці:

3) $\log_3(x + 2) = \log_3(2x - 5)$;
 $x + 2 = 2x - 5$; $x = 7$.

Перевірка. $\log_3(7 + 2) = \log_3 9 = 2$;
 $\log_3(2 \cdot 7 - 5) = \log_3 9 = 2$;
 $2 = 2$.

Відповідь: 7

Коментовано:

4) $\log_3(x - 2) = 0$; $x - 2 = 3^0$; $x - 2 = 1$; $x = 3$. **Відповідь: 3**

5) $\log_5(x - 1) = 1$; $x - 1 = 5^1$; $x = 6$.

Відповідь: 6

Після одержання кожної відповіді відкриваємо літеру.

- А) 2
Б) 8
Г) 3



Р) 7

І) 6

Ю) 4 (кожному числу відповідає літера)

Зашифроване слово: Бюргі

Йост Бюргі (1552 - 1632)

Демонструється портрет вченого на екран.

3 тур. У цьому турі беруть участь переможці другого туру. Вони по черзі біля дошки розв'язують завдання, правильна відповідь до якого дає можливість відгадати букву. Якщо учень допускає помилку, то хід передається іншому по черзі.

Завдання 3 туру. Французький математик, який у середині XVII ст. запропонував загальний метод розв'язування ірраціональних рівнянь.

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Завдання проектуються на екран.

Розв'яжіть рівняння:

1). $\log^2_3 x - 2 \log_3 x - 3 = 0$; $\log_3 x = y$, $y^2 - 2y - 3 = 0$; $y_1 = 3$, $y_2 = -1$.

$$\log_3 x = 3, \quad x = 27; \quad \log_3 x = -1, \quad x = 3^{-1}, \quad x = \frac{1}{3}.$$

Перевірка:

1). $x = 27$; $\log^2_3 27 - 2 \log_3 27 - 3 = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$, $0 = 0$.

2). $x = \frac{1}{3}$; $\log^2_3 \frac{1}{3} - 2 \log_3 \frac{1}{3} - 3 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$, $0 = 0$

Відповідь: 27; $\frac{1}{3}$.

2) $\lg x + \lg (x + 21) = 2$; $\lg x + \lg (x + 21) = \lg 100$;

$$\lg (x (x + 21)) = \lg 100;$$

$$x (x + 21) = 100; \quad x^2 + 21x - 100 = 0; \quad x_1 = -25, \quad x_2 = 4.$$

Перевірка:

1). $x = -25$; $\lg (-25) + \lg (-25 + 21) = \lg (-4)$ вирази не мають змісту.
 $x = -25$ сторонній корінь.

2). $x = 4$; $\lg 4 + \lg (4 + 21) = \lg (4 \cdot 25) = \lg 100 = 2$; $2 = 2$.

Відповідь: 4.

3) $\log_3 x = \log_3 (6 - x^2)$; $x = 6 - x^2$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x = -3$, $x = 2$.

Перевірка:

1). $x = -3$; $\log_3(-3)$ – не існує, $x = -3$ сторонній корінь;

2). $x = 2$; $\log_3 2 = \log_3 (6 - 2^2) = \log_3 2$. **Відповідь: 2**

4). $\lg(x+2) - \lg 5 = \lg(x-6)$; $\frac{x+2}{5} = x-6$; $x+2 = 5(x-6)$;

$$x+2 = 5x-30; \quad 4x = 32; \quad x = 8$$

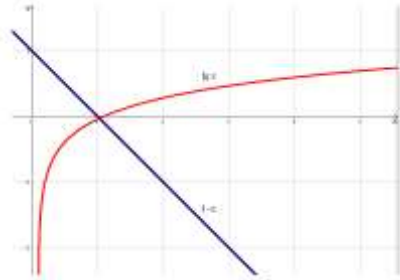
Перевірка:

$$\lg(8+2) - \lg 5 = \lg 10 - \lg 5 = \lg 2; \quad \lg(8-6) = \lg 2; \quad \lg 2 = \lg 2$$

Відповідь: 8

5). Розв'яжіть рівняння графічним методом $\lg x = 1 - x$.

Розв'язуємо за допомогою комп'ютера.



Відповідь: 1

Після одержання кожної відповіді відкриваємо літеру.

A) 1;

Б) 7;

Р) 2;

М) 8;

Е) 4;

Ф) 27, $\frac{1}{3}$;

О) 100; 0,1 .

Зашифроване слово: Ферма.



П'єр Ферма (1601 -- 1665)

Демонструється портрет вченого на екран.

III. Підсумок уроку. Підводимо підсумки гри, оголошуємо оцінки.

IV. Домашнє завдання.

1). §5, № 169, 171(а, б), 174(а, б).

2). Підготувати відомості із життя та діяльності вчених, прізвища яких прозвучали на уроці: Дж. Непер, Ф. Вієт, Й. Бюргі, П. Ферма в письмовій формі.

Зміст

1. Методичні рекомендації викладання теми «Логарифмічна функція та її властивості».

1). Логарифм числа. Властивості логарифмів.

2). Логарифмічна функція, її графік і властивості.

3). Логарифмічні рівняння.

4). Логарифмічні нерівності.

5). Логарифмічна функція в природі, науці, техніці, мистецтві.

II. 1) Методичні розробки уроків.

а) Логарифмічна функція, її графік і властивості.

б) Логарифм числа. Основна тригонометрична тотожність.

в) Розв'язування логарифмічних рівнянь.

2) Повідомлення про історію виникнення логарифмів.

Література

1. А. М. Колмогоров – Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10 класу середньої школи. К.: ”Радянська школа”, 1977.
2. М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук – Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10 класу середньої школи. К.: „Зодіак-Еко”, 2001.
3. Энциклопедический словарь юного математика/Сост. А.П.Савин. – М. : Педагогика, 1989.
4. Математична хрестоматія. Алгебра і початки аналізу. За ред. М.І.Кованцова. – К.: Радянська школа, 1977.
5. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике. – М.: Просвещение, 1978.
6. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
7. Велика ілюстрована енциклопедія школяра. К. «Махаон-Україна» 2002