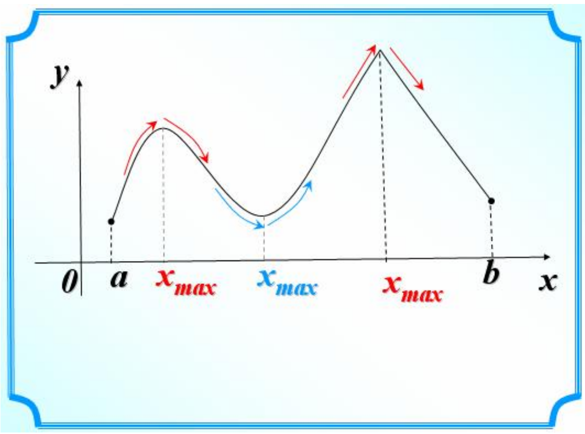
Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Рівненської обласної державної адміністрації
Навчально-методичний центр професійно-технічної освіти
у Рівненській області
Державний професійно-технічний навчальний заклад
„Сарненський професійний аграрний ліцей”

Розробка уроку з математики
на тему
„Критичні точки функції. Точки екстремуму“

(*10 клас*)



Підготувала
Гриневич Тетяна Олександрівна,
викладач математики
ДПТНЗ „Сарненський
професійний аграрний ліцей”

Сарни – 2015

Критичні точки функції. Точки екстремуму.

Методична розробка уроку

Жодна інша наука не навчає так
ясно розуміти гармонію природи,
як математика...
П. Карус

Будь - яка наука досягає вершин лише тоді,
коли вона користується математикою
К. Маркс

Дидактична мета: сприяти формуванню поняття критичних точок функції, точок екстремуму, екстремумів функції, засвоєнню необхідної й достатньої умови екстремуму, алгоритму знаходження екстремумів функції.

Розвиваюча мета: сприяти розвитку творчих здібностей учнів, логічного мислення, вміння аналізувати і синтезувати наукові ідеї; розвивати пам'ять, увагу, спостережливість, уміння обґрунтовувати і доводити справедливість свого твердження, виконувати узагальнення і систематизацію отриманих знань;

Виховна мета: сприяти вихованню старанності, цілеспрямованості, наполегливості у досягненні поставленої мети, математичної грамотності і культури мовлення, тактовності.

Тип уроку: засвоєння нових знань і вмінь

Обладнання: комп'ютер, мультимедійний проектор, роздатковий матеріал, презентація „Критичні точки функції. Точки екстремуму", картки для проведення гри „Математичне лото".

ХІД УРОКУ

I. ОРГАНІЗАЦІЯ КЛАСУ.

II. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ УЧНІВ.

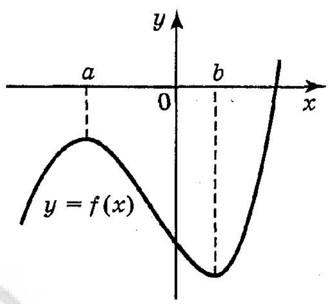
Усний рахунок:

1. Знайти похідну:

1) $x^2 + x^7$;	6) $4x^2$;
2) $2x$;	7) $\cos x - 3\ \mathrm{Sin}\ x$;
3) $\mathrm{Sin}\ x - 2$;	8) $\frac{3}{4}$;
4) $3\cos x$;	9) $\cos 2x$;
5) x^{-3};	10) -6.

2. Зростає чи спадає функція: $y = 5x - 2$; $y = 3 + 4x$; $y = 8 - 7x$; $y = 8$

3. Вкажіть проміжки зростання і спадання функції:



Як можна знайти проміжки зростання і спадання функції, якщо вона задана формулою?

Повторюємо ознаки зростання і спадання функції.

Проблемна ситуація:

На проміжках $(-\infty; a]$ і $[b; +\infty)$ функція зростає, похідна має знак „+”, на $[a; b]$ спадає, похідна „–”, а чим цікаві точки *a* і *b,* чим вони особливі.

ІІІ. МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

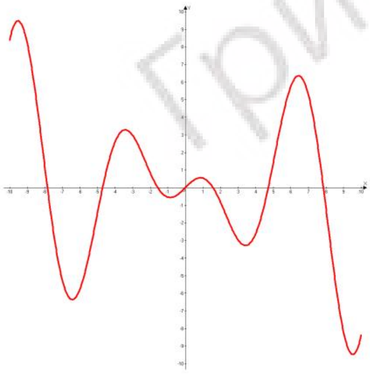
Ви вивчили одне із фундаментальних понять алгебри і початків аналізу – похідну, навчилися знаходити проміжки монотонності функції. І, напевно даєте собі запитання „А навіщо?”. Саме за допомогою похідної розв’язують задачі з фізики, економіки, геометрії, програмування. Викликає інтерес поняття точок, в яких похідна не додатна і не від’ємна.

Саме ці точки зацікавили багатьох вчених і зараз успішно допомагають людству в різних сферах діяльності. Зокрема, в екології, медицині, геології, економіці та ін. (слайд 4 „Дослідження функції і прикладні науки”)

Оголошую тему і мету уроку: „Критичні точки функції. Точки екстремуму”. Сьогодні ми познайомимось саме з такими точками і поняттями, які пов’язані з ними.

Демонструється презентація з коментуванням вчителя

IV. СПРИЙМАННЯ І УСВІДОМЛЕННЯ ПОНЯТТЯ ТОЧОК ЕКСТРЕМУМУ ТА ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ.



Користуючись малюнком знаходимо точки, особливі для графіка функції.

Означення Внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.

При дослідженні поведінки функції в деякій точці зручно користуватися поняттям околу. **(слайд 7)**

Околом точки $\boldsymbol{x_0}$ називається будь-який проміжок, для якого $\boldsymbol{x_0}$ є внутрішньою точкою. Наприклад, інтервали (2; 5), (2,5; 3,5), (2,9; 3,1) – околи точки 3.

Розглянемо графік функції, зображений на рис. 2. *(Використовується метод евристичної бесіди)*

В якій точці функція набуває найбільшого (найменшого) значення. Порівнюємо із значенням в інших точках.

Як видно із рисунка, існує такий окіл точки $x = a$, що найбільше значення функція $y = f(x)$ в цьому околі набуває в точці $x = a$. Точку $x = a$ називають точкою максимуму цієї функції.

Аналогічно точку $x = b$ називають точкою мінімуму функції $y = f(x)$, оскільки значення функції в цій точці найменше порівняно зі значеннями функції в деякому околі точки b.

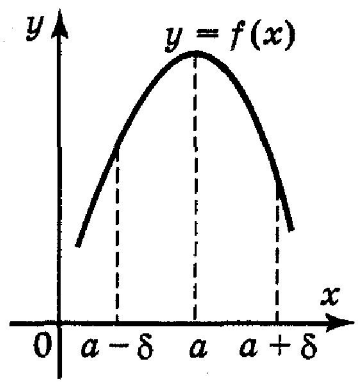


Рис.2

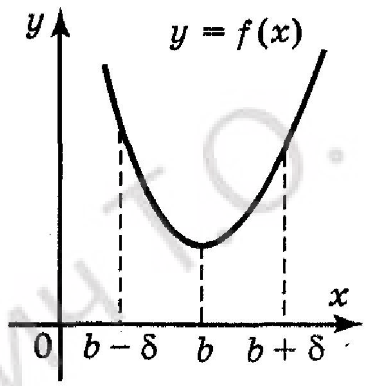
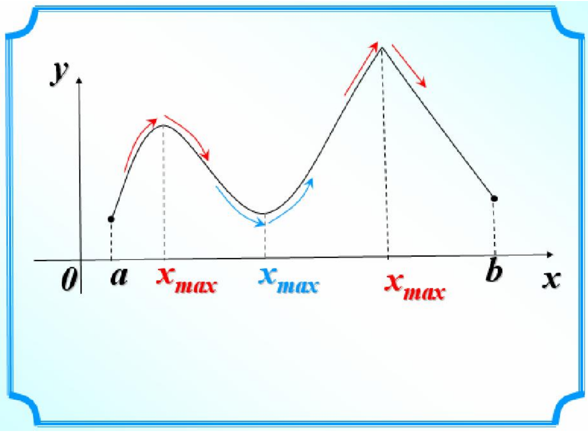


рис.3

Означення. Точка a із області визначення функції $f(x)$ називається точкою максимуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки a, що для всіх $x \neq a$ із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(a)$. (Рис. 2).

Означення. Точка b із області визначення функції $f(x)$ називається точкою мінімуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки b, що для всіх $x \neq b$ із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(b)$. (Рис. 3). *(Слайд 8, 9)*.

Означення. Точки максимуму і точки мінімуму називають точками екстремуму функції, а значення функції в цих точках називають екстремумами функції (максимум і мінімум функції) (лат. ***ekstremum*** – край, кінець)



Точки максимуму позначають x_{max}, а точки мінімуму — x_{min}.

Значення функції в цих точках, тобто максимуми і мінімуми функції, позначаються: y_{max} і y_{min}.

Виконання вправ усно (слайд 10). (Робота в групах : І ряд – пит.1, ІІ ряд – пит. 2, ІІІ ряд – пит. 3).

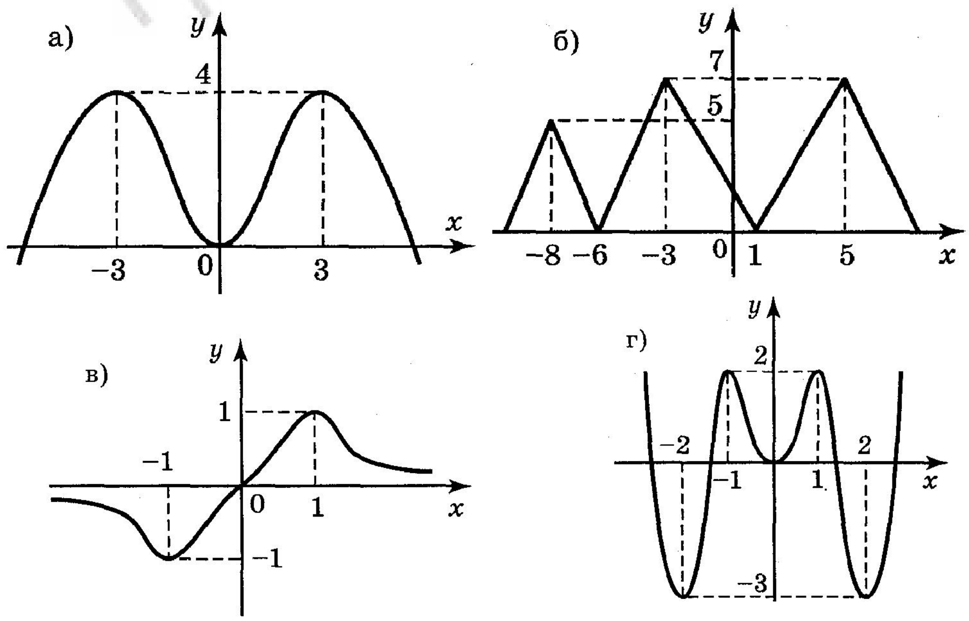
1. Бліц-опитування на слух, виконується дуже швидко. Можна проводити як змагання між командами (робота в групах).

1. Для функцій, графіки яких зображено на рисунках 41, α—*г* знайдіть:

1) точки максимуму функції

2) точки мінімуму функції;

3) екстремуми функції.



Відповідь: 1) а) $x_{max}= -3$, $x_{min}= 0$, $x_{max}= 3$; *б)* $x_{max}= -8$, $x_{min}= -6$; $x_{max}= -3$; $x_{min} = 1$; $x_{max}= 5$; в) $x_{min}= -1$; $x_{max}= 1$; г) $x_{min}= -2$; $x_{max}= -1$; $x_{min}= 0$; $x_{max}= 1$; $x_{min}= 2$;

2) а) y_{max}= 4; y_{min}=0; б) $y_{max=}$ 5; y_{max}= 7; y_{min}= 0; в) y_{min}= –1; y_{max}= 1; г) y_{min} = –3; y_{min}= 0; y_{max}= 2.

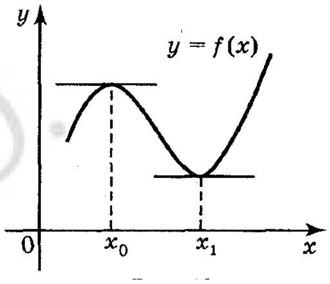
V. СПРИЙМАННЯ І УСВІДОМЛЕННЯ НЕОБХІДНОЇ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. *(Слайд 11)*

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена в деякому околі точки x_o і має похідну в цій точці.

Теорема Ферма. Якщо x_o — точка екстремуму диференційованої функції $y = f(x)$, то $f'(x_o) = 0$.

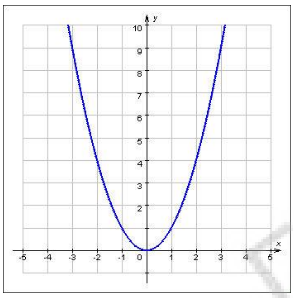
Це твердження називають теоремою Ферма на честь П'єра Ферма (1601—1665) — французького математика.

Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: в точці екстремуму дотична паралельна осі абсцис, і тому її кутовий коефіцієнт $f'(x_o)$ дорівнює нулю



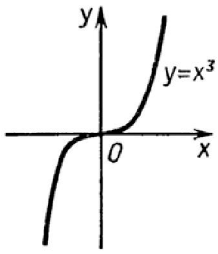
Проблема! (Слайд 12)

Чи завжди критичні точки є точками екстремуму?



Розглянемо функції $y = x^2$ та $y = x^3$.

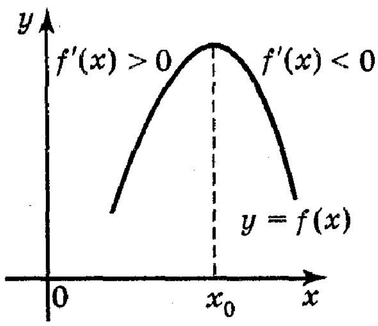
Наприклад, функція $f(x) = x^2$ має в точці $x_o = 0$ мінімум, її похідна $f'(0) = 0$.



Якщо $f(x) = x^3$, то $f''(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$.

Проте точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, оскільки функція $f(x) = x^3$ зростає на всій числовій осі.

Отже, для того, щоб точка була точкою екстремуму недостатньо, щоб вона була критичною.



VI. Сприймання і усвідомлення достатньої ознаки екстремуму функції (слайд 13).

Сформулюємо достатні умови того, що критична точка є точкою екстремуму, тобто умови, при виконанні яких критична точка є точкою максимуму або мінімуму функції.

Якщо похідна ліворуч критичної точки додатна, а праворуч — від'ємна, тобто при переході через цю точку похідна змінює знак з „+” на „–”, то ця критична точка є точкою максимуму (рис.1).

Дійсно, в цьому випадку ліворуч стаціонарної точки функція зростає, а праворуч — спадає, отже, дана точка є точкою максимуму.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки від'ємна, а праворуч — додатна, тобто при переході через стаціонарну точку похідна змінює знак з „–” на „+”, то ця стаціонарна точка є точкою мінімуму (рис.2).

Якщо при переході через стаціонарну точку похідна не змінює знак, тобто ліворуч і праворуч від стаціонарної точки похідна додатна або від'ємна, то ця точка не є точкою екстремуму.

Складемо алгоритм знаходження екстремумів функції. *(Слайд 14)*

1. Знайти область визначення.
2. Знайти критичні точки функції.
3. Визначити,які з них є точками екстремуму.
4. Обчислити значення функції в точках екстремуму.

VII. ОСМИСЛЕННЯ НАБУТИХ ЗНАНЬ.

1. Розв’язування вправ. *(Слайд 15)*

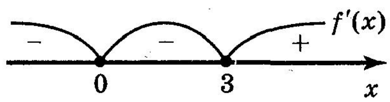
Приклад 1. Знайдіть екстремуми функції $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Розв'язування

Область визначення функції — $\boldsymbol{R}$.

Знайдемо похідну: $f\,'(x)= (x^4 – 4x^3) = 4x^3 – 12x^2 = 4x^2(x – 3)$.

Знайдемо стаціонарні точки: $f\,'(x) = 0,\ 4x^2(x – 3) = 0$, $x = 0$ або $x = 3$.



Наносимо стаціонарні точки на координатну пряму та визначаємо знак похідної на кожному інтервалі.

$x = 3$ — точка мінімуму, бо при переході через цю точку похідна змінює знак з „–” на „+”: $\boldsymbol{x_{min}} = 3$.

Точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, бо похідна не змінює знак при переході через цю точку.

Отже, $\boldsymbol{y_{min}} = f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$.

Відповідь: $\boldsymbol{y_{min}} = f(3) = -27$.

2. Гра «Математичне лото» (Робота в парах) *(Слайд 16 - 23).*

Знайдіть похідну

1. $5x^2$ 10x; 5
2. $7 + 9x$ 9

3. Визначте проміжки, на яких похідна має знак «–»

x	$(-\infty;-7)$	–7	(–7;–3)	–3	(–3;5)	5	$(5;+\infty)$
y	↗	3	↘	–1	↗	2	↘

(–7; –3); (–7; –3)U (5; +∞)

4. Назвіть точки мінімуму функції, якщо дані про її похідну наведені в таблиці

x	$(-\infty;-1)$	–1	(–1;5)	5	(5;9)	9	$(9;+\infty)$
y'	+	0	–	0	+	0	–

x = 9; x = 5

5. Визначте проміжки зростання функції, використовуючи дані про похідну

x	$(-\infty;-9)$	–9	(–9;–1)	–1	(–1;3)	3	$(3;+\infty)$
y'	+	0	–	0	+	0	–

(–∞; –9) U (–1; 3);
(–9; –1) U (–1;3)

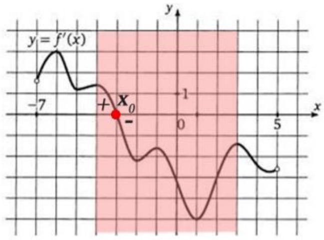
6. Назвіть точки максимуму функції, якщо дані про її похідну наведені в таблиці

x	$(-\infty;-4)$	–4	(–4;5)	2	(2;8)	8	$(8;+\infty)$

y'	–	0	+	0	–	0	+

x = 2 ;   x = 8

7. Задано графік похідної f ’(x_0), x_0 – точка екстремуму. Яка це точка - максимуму чи мінімуму?



Точка максимуму;   Точка мінімуму

8. Як поводить себе функція?

а).   y = 5 – 4x

б).   y = 3x + 6   а).Спадає ;   б). Зростає

Якщо відповіді правильні, то учень складе слово ,,П’єр Ферма” і отримує 11 балів. За кожну неправильну відповідь знімається 1 бал.

VIII. ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ.

Перевіряються результати гри.

IX. ПОВІДОМЛЕННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ.

1. §10, №355(а), 359(б) *(Слайд 24)*
2. Підготувати історичну довідку про П’єра Ферма.